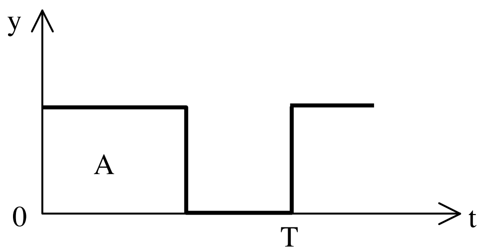
■ 1 ■

Etudes des circuits linéaires en régime sinusoïdal monophasé

PROPRIETES DES GRANDEURS PERIODIQUES

▶ **Valeur moyenne**



La valeur moyenne d'une grandeur périodique de période T, notée < y >, est définie par :

$$\boxed{< y > = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\ \ dt\ = \frac{A}{T}}$$

A est l'aire comprise entre le signal et l'axe des temps pendant la période T.
Remarque : si le signal est alternativement positif et négatif sur la période T, l'aire A est égale à : $A = A_1 - A_2$ avec A_1 l'aire au dessus de la courbe et A_2 l'aire en dessous.

▶ **Valeur efficace**

La valeur efficace d'une grandeur périodique de période T, notée Y, est définie par :

$$\boxed{Y = \sqrt{< y^2 >}\text{ , avec } < y^2 > \ = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\ \ dt}$$

Remarque : pour des signaux carrés ou triangles, on peut calculer la valeur efficace par la méthode des aires. Pour cela :

- On élève l'amplitude du signal au carré. On représente $y^2 = f\ (t)$;
- On calcule sa valeur moyenne par la méthode des aires : $< y^2 > \ = \frac{A}{T}$;
- On extrait la racine carrée du résultat : $\sqrt{< y^2 >} = Y$.

REGIME SINUSOÏDAL

▸ Grandeurs sinusoïdales en jeu

Exemple d'une tension : $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$

- $u(t)$ valeur instantanée exprimée en volt
- $\hat{U}$ valeur maximale ou amplitude ou valeur crête exprimée en volt
- U valeur efficace exprimée en volt ou mV
- $(\omega t + \varphi_u)$ phase à l'instant t exprimée en radians et fonction affine de t
- φ_u phase à l'origine des temps exprimée en radians
- ω pulsation exprimée en radians par seconde ($rad.s^{-1}$)
- T période de la fonction sinusoïdale en seconde (s)
- f fréquence de la fonction sinusoïdale avec $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Remarques : $U = \hat{U}/\sqrt{2}$ (valeur efficace)
$< u > = 0$ (valeur moyenne)
$U_{cc} = 2\hat{U}$ (valeur crête à crête).

▸ Vecteur de Fresnel associé à une grandeur sinusoïdale

A toute fonction sinusoïdale on peut associer un vecteur tournant que l'on représente à l'instant t = 0.

Caractéristiques du vecteur tournant $\vec{U}$ associé à la fonction u :

- son module est égal à la valeur efficace de u : $\|\vec{U}\| = U$
- l'angle orienté entre l'axe origine des angles (axe de référence) $O\vec{x}$ et le vecteur est égal à la phase à l'origine des temps de u : $(O\vec{x} \,;\, \vec{U}) = \varphi_U$
- la vitesse angulaire à laquelle tourne le vecteur est égale à la pulsation de la fonction sinusoïdale.

▸ Nombre complexe associé

A la fonction sinusoïdale $u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$ on peut associer le nombre complexe $\underline{U} = [U \,;\, \varphi_u]$.

▸ Lois

Les lois des nœuds et des mailles établies en continu s'appliquent en régime sinusoïdal aux :

- valeurs instantanées
- vecteurs de Fresnel
- nombres complexes associés.

▸ Différence de phase ou déphasage entre deux fonctions sinusoïdales de même fréquence

Soient deux tensions et leur vecteurs tournant associés :

$u_1 = U_1\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_{U1}) \Rightarrow \vec{U}_1 = (U_1 \,;\, \varphi_{U1})$

$u_2 = U_2\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_{U2}) \Rightarrow \vec{U}_2 = (U_2 \,;\, \varphi_{U2})$.

Le **déphasage de u_2 par rapport à u_1** est :

$$\varphi_{U2/U1} = (\vec{U}_1 \; ; \; \vec{U}_2) = (\varphi_{U2} - \varphi_{U1})$$

Interprétation du signe de φ :

- si est positif : u_2 est en avance sur u_1
- si φ est négatif : u_2 est en retard sur u_1.

Décalage horaire :

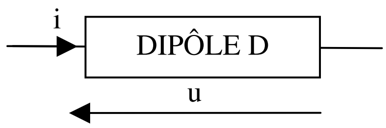
A un déphasage $|\varphi|$ on associe le décalage horaire τ tel que $\dfrac{T}{2\pi} = \dfrac{\tau}{|\varphi|}$.

ETUDE DES CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL

▶ Généralités

Lorsqu'un dipôle linéaire est soumis à une tension sinusoïdale u de fréquence f, il est parcouru par un courant sinusoïdal de même fréquence f.
Un circuit est dit linéaire s'il est uniquement formé de dipôles linéaires (dipôles R, L et C par exemple).
Dans une construction de Fresnel relative à ce circuit, tous les vecteurs tournant tournent à la même vitesse ω et forme une figure indéformable au cours du temps.

▶ Loi d'Ohm



$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{U} = [U \; ; \varphi_u]$
$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{I} = [I \; ; \varphi_i]$

$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ où $\underline{Z}$ est l'impédance complexe du dipôle
On en déduit :

- $Z = U/I$ Z est le module de $\underline{Z}$, il s'exprime en Ω
  U et I sont les valeurs efficaces de u et i
- $\arg \underline{Z} = \arg \underline{U} - \arg \underline{I} = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_{u/i}$

Remarque : On définit l'admittance complexe $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance $\underline{Z}$: $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$.

▶ Résistor de résistance R

$\underline{Z} = R \Rightarrow Z = R$ et $\varphi_{u/i} = 0$ c'est-à-dire u et i sont en phase.
$u = R\,i \Rightarrow \hat{U} = R\,\hat{I} \Rightarrow U = R\,I$.

▸ **Condensateur parfait de capacité C**

En valeurs instantanées : $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$.

Si $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow i = C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u)$.

On peut aussi écrire $i = C\omega U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u + \pi/2)$.

Par identification avec $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$ on obtient :

$$I = C\omega U$$

$$\varphi_i = \varphi_u + \pi/2$$

d'où $Z = \frac{1}{C\omega}$ et $\varphi_{U/I} = -\frac{\pi}{2}$ rad $\Rightarrow$ u est en quadrature retard (arrière)sur i.

Rn complexe $\underline{I} = (C)(j\omega)\underline{U}$ d'où $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ soient :

$$Z = \frac{1}{C\omega} \text{ et } \arg\underline{Z} = \varphi_{U/I} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

▸ **Inductance L**

En valeurs instantanées : $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$.

Si $I = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow u = L\omega I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_i)$.

On peut aussi écrire $U = L\omega I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i + \pi/2)$.

Par identification avec $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$ on obtient :

$$U = L\omega I$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \pi/2$$

D'où $Z = L\omega$ et $\varphi_{u/i} = +\pi/2$ rad $\Rightarrow$ u est en quadrature avance sur i.

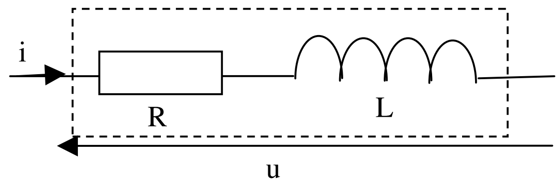
En complexe $\underline{U} = (L)(j\omega)\,I$ d'où $\underline{Z} = jL\omega$ soient :

$$Z = L\omega \text{ et } \arg\underline{Z} = \varphi_{U/I} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

▸ **Association de dipôles linéaires**

Association série : $\underline{Z}_T = \sum_i \underline{Z}_i$ Z

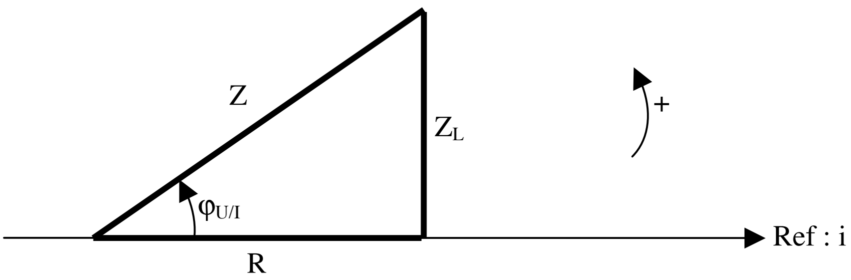
Exemple : Bobine de résistance R et d'inductance L



$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega$$

$$\text{d'où } Z = \sqrt{\left(R^2 + (L\omega)^2\right)} \text{ et } \tan\varphi_{U/I} = \frac{L\omega}{R}$$

Triangle des impédances



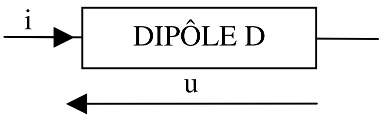
Association parallèle :

Lors d'une association parallèle de divers dipôles , on fera la somme des admittances complexes de chacun des dipôles pour obtenir l'admittance complexe du dipôle équivalent à l'association parallèle :

$$\underline{Y}_T = \sum_i \underline{Y}_i$$

PUISSANCES EN REGIME SINUSOÏDAL MONOPHASE

▶ **Généralités**



$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{U} = [U\ ;\ \varphi_u]$

$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{I} = [I\ ;\ \varphi_i]$

On choisit de prendre i en référence :

$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t) \Rightarrow \underline{I} = [I\ ;\ 0]$

$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_{u/i}) \Rightarrow \underline{U} = [U\ ;\ \varphi_{u/i}]$

▶ **Puissance instantanée**

Définition générale : $p(t) = u(t)\ i(t)$

Soit en prenant : $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ et $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t)$, on obtient :

$p(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \times I\sqrt{2}\sin(\omega t)$

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \varphi)$$

La puissance instantanée est la somme de deux termes, un terme constant et un terme périodique de période 2T.

▶ **Puissance active**

La puissance active est égale à la valeur moyenne de la puissance instantanée. le terme périodique ayant une valeur moyenne nulle, il reste :

$$P = UI\cos\varphi_{u/i}$$

La puissance active s'exprime en Watt (W).

▶ **Puissance réactive**

La puissance réactive n'est qu'un artifice mathématique :

$$Q = UI \sin\varphi_{u/i}$$

La puissance réactive s'exprime en volt.ampère.réactif (var).

▶ **Signe des puissances et comportement de l'élément étudié**

On peut obtenir des puissances actives et réactives de valeurs négatives, le signe de ces puissances traduit le comportement réel de l'élément étudié.

Il faut regarder le fléchage de l'élément : convention récepteur (u et i en sens opposé) ou générateur (u et i dans le même sens) : dans notre cas, le dipôle D est fléché en tant que récepteur.

Après calcul des puissances, on associe le fléchage de l'élément au signe de la puissance calculée de la manière suivante :

- Si convention de l'élément est la convention récepteur et que la puissance calculée est positive alors l'élément se comporte réellement comme il a été fléché, soit ici en récepteur : il absorbe de la puissance.
- Si convention de l'élément est la convention récepteur et que la puissance calculée est négative alors l'élément se comporte réellement en inverse de son fléchage, soit ici en générateur : il fournit de la puissance.

▶ **Puissance apparente**

La puissance apparente ne fait pas intervenir le déphasage :

$$S = UI$$

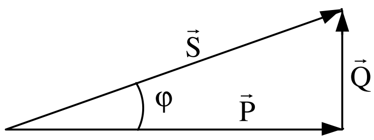
La puissance apparente s'exprime en volt.ampère (VA).

▶ **Triangle des puissances**

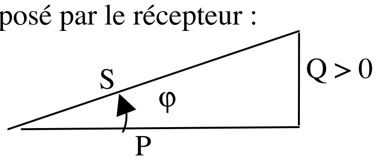
Quel que soit le récepteur, on note qu'on a à faire à un triangle rectangle, donc :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

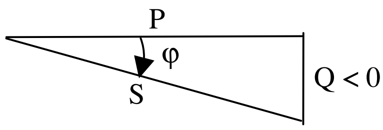
$$P = S\cos\varphi \quad Q = S\sin\varphi \quad Q = P\tan\varphi$$



Pour ces deux dernières relations, il faudra tenir compte du signe de φ imposé par le récepteur :



Récepteur inductif : $\varphi > 0$



Récepteur capacitif : $\varphi < 0$

Facteur de puissance

Définition générale : $Fp = \dfrac{P}{S}$.

$$Fp = \cos\varphi \text{ pour le régime sinusoïdal}$$

▶ Théorème de Boucherot

Les puissances actives et réactives absorbées par un groupement de récepteurs sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque récepteur.
Attention, on ne peut pas sommer les puissances apparentes.

▶ Relèvement du facteur de puissance à 0,93

EDF l'impose pour éviter de surdimensionner ses installations.
Ce relèvement s'effectue avec des condensateurs (ne consommant pas de puissance active et fournissant de la puissance réactive Qc) placés en dérivation sur l'installation industrielle concernée.
On obtient alors :

$$P' = P \text{ et } Q' = Q + Qc$$

Soit φ le déphasage entre la tension et l'intensité avant le relevage et φ' le déphasage entre la tension et l'intensité après le relevage.
On rappelle que :

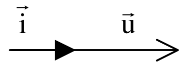
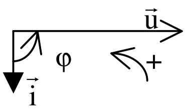
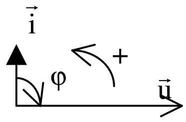
$$Q = P \tan\varphi \; ; \; P' = P \; ; \; Q' = P' \tan\varphi' \; ; \; Qc = -C\omega U$$

La capacité de l'ensemble nécessaire est donc obtenue à l'aide de la relation suivante :

$$C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega U^2}$$

où U est la tension aux bornes du condensateur.
Le relèvement permet de diminuer l'intensité en ligne et donc de réduire les pertes par effet Joule.

▶ Récapitulatif

Elément	Relations	Impédances	Puissances	Diagrammes de Fresnel
Résistor R	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{Z} = R$ $\underline{Z} = [R \; ; \; 0]$	$P = RI^2$ $Q = 0$	$\varphi = 0$ 
Inductance L	$\underline{U} = jL\omega\underline{I}$	$\underline{Z} = jL\omega$ $\underline{Z} = \left[L\omega \; ; \; \frac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = L\omega I^2$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$ 
Capacité C	$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$	$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ $\underline{Z} = \left[\frac{1}{C\omega} \; ; -\frac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = -U^2C\omega$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ 

◣ Enoncés des exercices ◢

■ Exercice 1 .... (20 min)

Soit le montage suivant :

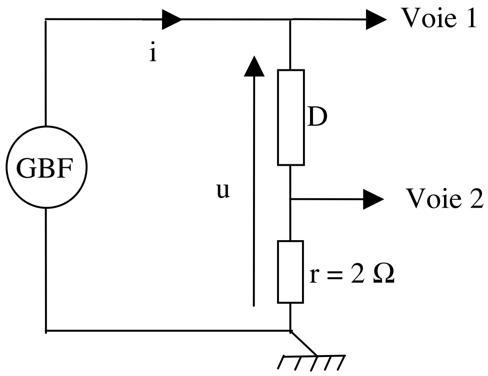
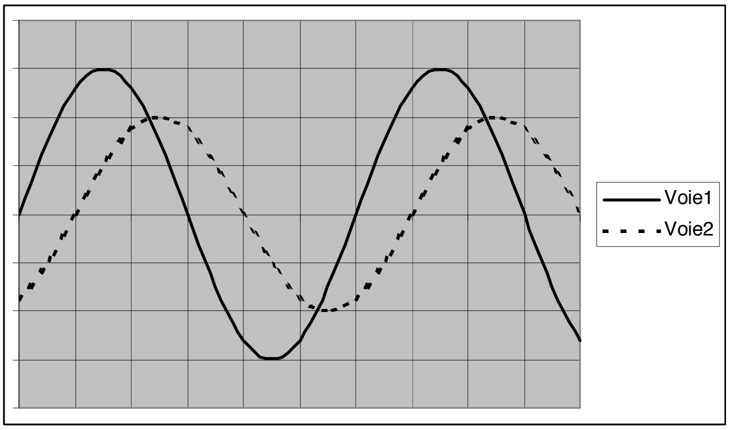


Figure 1

Et voici ce qu'on observe à l'oscilloscope :



sensibilité voie 1 : 2 V/div
sensibilité voie 1 : 0,2 V/div
vitesse de balayage : 1 ms/div.

1. Qu'observe-t-on sur les voies 1 et 2 ?
2. Calculer la tension efficace U et l'intensité efficace I.
3. Calculer la période, la fréquence et la pulsation de u et i.
4. Calculer le déphasage $\varphi_{u/i}$.
5. En prenant l'intensité i comme référence, écrire les expressions des grandeurs complexes $\underline{I}$ et $\underline{U}$, puis tracer les vecteurs des complexes associés.