CHAPITRE 1

Calcul algébrique

1.1 Fractions

On appelle ***fraction*** tout nombre pouvant s'écrire comme un quotient de deux entiers a et b, où $b \neq 0$, noté :

$$\frac{a}{b}$$

NB : Si a et b ne sont pas entiers, l'écriture $\frac{a}{b}$ est alors appelée ***écriture fractionnaire***.

Soient a, b, c, d et k des réels, (b et d non nuls).

addition/soustraction :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Produit :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Quotient (c non nul) :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Simplification :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

1.2 Développement, factorisation

1.2.1 Facteur commun

Soient a, b et c trois réels. On a :

$$a \times b \pm a \times c = a(b \pm c)$$

1.2.2 Identités remarquables

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

1.3 Puissances

$$a \times a \times a \times \cdots \times a = a^n$$

Soient a et b deux réels non nuls, n et p deux entiers.

— $(ab)^n = a^n \times b^n$
— $a^{n+p} = a^n \times a^p$
— $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
— $a^{n-p} = \dfrac{a^n}{a^p}$
— $a^0 = 1$
— $(a^n)^p = a^{np}$

1.4 Valeur absolue

Soit x un réel, on appelle ***valeur absolue*** de x que l'on note $|x|$, la distance qui sépare x de 0, c'est-à-dire :

— Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$
— Si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$

1.5 Sommation

1.5.1 Principe

Lorsqu'on souhaite additionner des termes présentant une forme générale pouvant être indexée par un entier naturel, on peut utiliser un symbole très commode pour exprimer la somme de façon bien plus synthétique.

Le symbole Σ (« S » majuscule en grec) précède une expression dépendant d'un paramètre (k, i, n, ou autre) qui croît de 1 en 1 à chaque terme de l'addition.

Sous le symbole Σ, on indique la première valeur de l'indice, et au-dessus du symbole Σ, on indique la dernière valeur de l'indice.

Exemples :

$$\sum_{k=3}^{8} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{3} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7$$

1.5.2 Règles de calcul

Les règles sont celles de la factorisation et du développement.

— Si le terme général de la somme contient un facteur ne dépendant pas de l'indice, on peut le mettre en facteur de toute la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} 3k = 3 \sum_{k=0}^{n} k$$

On ne peut évidemment pas en faire autant si le facteur dépend de l'indice de sommation :

$$\sum_{k=0}^{n} k(5k+1) \neq k \sum_{k=0}^{n} (5k+1)$$

— Si le terme général de la somme est lui-même une somme, on peut alors scinder l'expression de la façon suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+k^2) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k^2$$

— Si le terme général est une constante, alors la somme revient à multiplier cette constante par le nombre de termes dans la somme :

$$\sum_{k=p}^{n} 2 = 2 \times (n-p+1)$$

Donc par exemple, en appliquant ces règles, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2+3k+1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 3 \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$

CHAPITRE 2

Aires de surfaces simples

— L'aire d'un triangle est égale à :

$$\frac{B \times h}{2}$$

où B est l'un des côtés et h la hauteur perpendiculaire à ce côté.

— L'aire d'un rectangle est égale à :

$$L \times l$$

où L et l sont les longueurs de deux côtés adjacents du rectangle.

— L'aire d'un trapèze est égale à :

$$\frac{(B + b) \times h}{2}$$

où B et b sont les longueurs des deux côtés parallèles du trapèze et h, la hauteur du trapèze (distance entre les deux côtés parallèles).

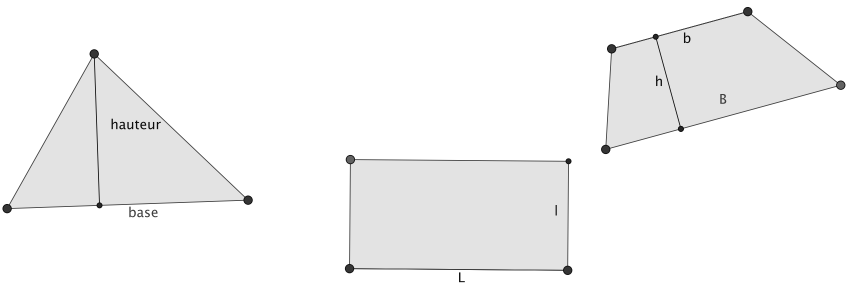

Figure 2.1 – Surfaces simples

CHAPITRE 3

Fonctions de référence

3.1 Fonction exponentielle

3.1.1 Propriétés analytiques

Signe :

exp est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Expression :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x.$$

Le nombre e est défini dans le paragraphe 3.2.1

Dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x).$$

$$(e^u)' = e^u u'.$$

Conséquence :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) > 0$, donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Équations/Inéquations :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ (e^a = e^b) \Leftrightarrow (a = b)$$

exp étant de plus strictement croissante, on a :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ (e^a < e^b) \Leftrightarrow (a < b)$$

3.1.2 Propriétés algébriques

Théorème :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Conséquences

$$\begin{aligned} e^{-a} &= \frac{1}{e^a} \\ e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} \\ e^0 &= 1 \\ (e^a)^b &= e^{ab} \end{aligned}$$

3.2 Fonction logarithme népérien

Théorème :

ln est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.2.1 Propriétés analytiques

Dérivée :

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

Quelle que soit la fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

sur I.

Variations

On en déduit ainsi le tableau de variation de ln :

x	0		1		$+\infty$
					$+\infty$
				$\nearrow$	
ln			0		
		$\nearrow$			
	$-\infty$				