1. Suites numériques

Chacun des exercices suivants comporte un énoncé avec un corrigé proposé.
Ce dernier est faux car une erreur s'y est glissée. Après lecture du corrigé proposé, repérer l'erreur et rectifier le corrigé.

Exercice 1

Enoncé
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par :

$$u_{n+1} = u_n^2 - n - \frac{1}{2}$$

Calculer u_1 et u_2.

Corrigé proposé
$u_1 = u_0^2 - 0 - \frac{1}{2} = 2^2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$
$u_2 = u_1^2 - 2 - \frac{1}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = \frac{49}{4} - \frac{10}{4} = \frac{39}{4}$

Exercice 2

Enoncé
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$$

On souhaite afficher sur un tableur les premiers termes de cette suite.

Pour cela, on adopte la disposition suivante.

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	

Que peut-on saisir dans la cellule B3 afin d'obtenir, après étirement vers le bas, l'affichage de ces premiers termes ?

Corrigé proposé

On peut saisir « =3*B2-2*A3+1 ».

Exercice 3

Enoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2n + 1}{3}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq n - 1$.

Corrigé proposé

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $P_n : \ u_n \geq n - 1$.

● P_0 est vraie.

En effet, $u_0 = 1$ et $1 \geq 0 - 1$ donc $u_0 \geq 0 - 1$.

● Soit $n \geq 1$.
Supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} l'est aussi c'est-à-dire $u_{n+1} \geq n$.

$u_n \geq n - 1$ (hypothèse de récurrence)

$u_n + 2n + 1 \geq 3n$

$\frac{u_n+2n+1}{3} \geq n$

$u_{n+1} \geq n$

P_{n+1} est donc vraie.

● **Conclusion** : Pour tout entier $n \geq 0,\ u_n \geq n - 1$

Exercice 4

Enoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2n + 1}{3}$$

Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $v_n = u_n - n + 1$, est géométrique et préciser sa raison.

Corrigé proposé

$u_1 = \frac{u_0+2\times0+1}{3} = \frac{2}{3}$

$u_2 = \frac{u_1+2\times1+1}{3} = \frac{\frac{2}{3}+3}{3} = \frac{11}{9}$

$v_0 = u_0 - 0 + 1 = 2$

$v_1 = u_1 - 1 + 1 = \frac{2}{3}$

$v_2 = u_2 - 2 + 1 = \frac{11}{9} - 1 = \frac{2}{9}$

$v_1 = \frac{1}{3}v_0$ et $v_2 = \frac{1}{3}v_1$ donc la suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Exercice 5

Enoncé

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2n + (-1)^n$.

Déterminer la limite de le suite (u_n).

Corrigé proposé

$\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = 1$, donc par somme :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-2n + (-1)^n\right) = -\infty$$

Exercice 6

Enoncé

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+n}{2} \end{cases}$

Compléter l'algorithme suivant de sorte qu'après exécution la variable N ait pour valeur le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{30}$.

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 1$
TantQue …
  … ← …
  … ← …
FinTantQue

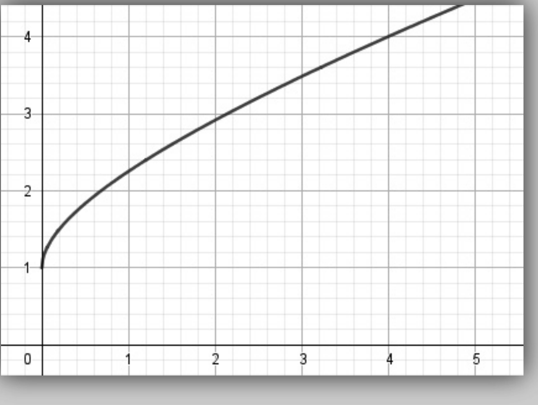
Corrigé proposé

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 1$
TantQue $U < 10^{30}$
  $N \leftarrow N + 1$
  $U \leftarrow \frac{U+N}{2}$
FinTantQue

Exercice 7

Enoncé

On a représenté ci-après dans un repère du plan, la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{4} + 1$.



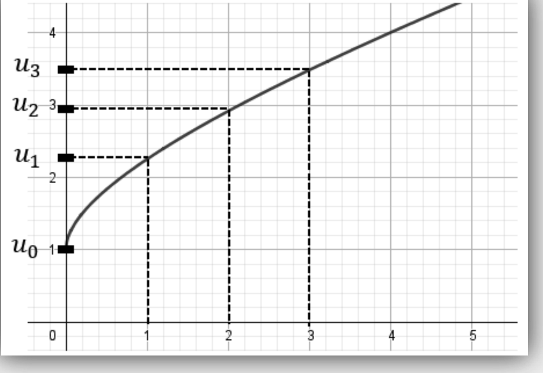
Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{u_n}{4} + 1 \end{cases}$

Représenter sur ce graphique, sans faire de calculs, les quatre premiers termes de la suite (u_n) en laissant les traits de construction apparents.

Émettre ensuite une conjecture sur les variations et la limite de la suite (u_n).

Corrigé proposé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sont donc les images respectives de 0, 1, 2 et 3 par la fonction f, d'où la représentation de ces termes sur l'axe des ordonnées.



Conjecture : la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

Exercice 8

Enoncé

On suppose qu'une suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 3$ et $f(4) = 4$.

Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4.
Que peut-on en déduire ?

Corrigé proposé

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, P_n : $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

● P_0 est vraie.

En effet, $u_0 = 2$ et $u_1 = f(u_0) = f(2) = 3$ donc $u_0 \leq u_1 \leq 4$.

● Soit $n \geq 0$. Supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} l'est aussi, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

$u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ (hypothèse de récurrence)

$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$ (car f est croissante sur $\mathbb{R}$)

$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

P_{n+1} est donc vraie.

● **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 4.

On en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, qu'elle converge vers 4.

Exercice 9

Enoncé

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+n+1}{n\sqrt{n}+2n+3}$.

Corrigé proposé

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n\sqrt{n}+2n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{n\sqrt{n}}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) = +\infty$.

Alors, par quotient, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = 0$, d’où $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n\sqrt{n}+2n+3} = 0$.

Exercice 10

Enoncé

Calculer $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Corrigé proposé

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc par composition, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$$

Par différence, on a alors $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Exercice 11

Enoncé

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$.

Corrigé proposé

$\lim_{k\to+\infty} 3^k = +\infty$ (car $3 > 1$) donc $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{3^k} = 0$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 0$.

Exercice 12

Enoncé

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq 3$.

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-3)(u_n-1)}{u_n}$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle converge

Corrigé proposé

Soit $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{(u_n-3)(u_n-1)}{u_n} &= \frac{(-u_n+3)(-u_n+1)}{u_n} \\ &= \frac{u_n^2-4u_n+3}{u_n} \\ &= -\frac{4u_n}{u_n} + \frac{3}{u_n} + \frac{u_n^2}{u_n} \\ &= -4 + \frac{3}{u_n} + u_n \\ &= u_{n+1} - u_n \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-3)(u_n-1)}{u_n}$

Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n - 3 \geq 0$, $u_n - 1 > 0$ et $u_n > 0$ (car $u_n \geq 3$) donc $-\frac{(u_n-3)(u_n-1)}{u_n} \leq 0$, d'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante. Puisque de plus elle est minorée (par 3), alors d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

Exercice 13

Enoncé

Compléter l'algorithme suivant de sorte qu'après exécution la variable S ait pour valeur la somme des carrés des entiers de 1 à 100, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{100} k^2$.