1.1
Présentation générale

La théorie de la relativité d'échelle[1] est une généralisation moderne aux transformations d'échelle des théories de la relativité. Nous allons la présenter de manière générale dans ce chapitre et renvoyons le lecteur au chapitre 4 pour une présentation plus détaillée de son formalisme (voir la bibliographie pour un compte-rendu complet).

Introduction

Les théories de la relativité se sont développées, depuis maintenant plus de quatre siècles, à partir du premier énoncé de relativité du mouvement dû à Galilée autour de 1592. Giordano Bruno, pratiquement à la même époque, découvrait quant à lui la relativité de la position comme conséquence de la révolution copernicienne. En effet, celle-ci, en invalidant l'idée que la Terre soit le centre du monde, permit de concevoir un monde sans centre ni bord, où plus aucun point n'est privilégié pour définir l'origine du système de coordonnée. Il en est de même pour l'orientation des axes de ce système, qui ne peut être définie que de manière relative (c'est-à-dire par des différences angulaires).

De même, *il n'existe aucun mouvement absolu*, autrement dit, dans le repère entraîné avec le mouvement, il n'y a aucun mouvement. Dans le *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, Galilée en 1630 écrit :

Le mouvement est mouvement et agit comme mouvement pour autant qu'il est en rapport avec des choses qui en sont dépourvues. Pour toutes les choses qui y participent, […] *le mouvement est comme s'il n'était pas.* […] *Le mouvement est comme rien.*

Il érigea explicitement cette constatation en principe de relativité du mouvement :

Posons donc comme principe […] *que, quel que soit le mouvement que l'on attribue à la terre, il est nécessaire que, pour nous qui sommes les habitants d'icelle, et par conséquent participants de celui-là, il reste parfaitement imperceptible et comme n'étant pas…*

1. Nottale, 1989, 1992, 1993, 1998.

On remarquera que l'énoncé galiléen va droit à l'essentiel et pointe directement, au niveau de la définition même qu'il en donne, l'aspect le plus profond de la relativité : *le mouvement n'existe pas de manière absolue*, autrement dit, dans le repère propre, entraîné avec le mouvement (« *pour les choses qui y participent* ») il n'y a aucun mouvement. Un même corps montre des mouvements différents dans des repères différents, et dans l'un de ces repères, le repère propre (celui du corps lui-même), tout mouvement disparaît. Il s'agit là d'un véritable principe de « *relativité-vacuité* », au sens de l'absence de toute existence propre du mouvement ou de la position. Il ne s'agit pas d'inexistence, ou de néant : mouvement ou position existent, mais pas de manière intrinsèque à l'objet, uniquement comme relation. Leur mode d'être est relatif. Il n'y a pas de mouvement *en soi*.

La *relativité du mouvement* trouva un nouvel élan au début du XXe siècle avec les travaux de Poincaré et d'Einstein. Leur découverte qu'espace et temps ne pouvaient être séparés, mais sont chacun des projections (l'une tridimensionnelle, l'autre unidimensionnelle), d'un même espace-temps, a révolutionné la physique. Le mouvement lui-même se ramène alors à une rotation (dans l'espace-temps), si bien que ses effets peuvent être compris comme une généralisation à quatre dimensions des effets, bien connus, de changement d'orientation dans l'espace ordinaire tridimensionnel.

Avec la compréhension de la relativité de la gravitation, une nouvelle étape essentielle est franchie par Einstein en 1915. De même qu'un observateur, entraîné dans le mouvement rectiligne uniforme d'un véhicule, ne sent pas ce mouvement, un observateur en chute libre dans un champ de gravitation (c'est-à-dire en mouvement uniformément accéléré), ne sent plus son propre poids. Autrement dit, pour lui la gravitation a disparu, il est en *apesanteur.* Ainsi la gravitation elle-même n'est pas absolue, mais relative au choix de l'état de mouvement du système de référence. C'est ce qu'Einstein a réalisé en 1907, et qui l'a amené à poser le *principe d'équivalence locale* entre un champ de gravitation et un champ d'accélération. C'est ainsi que la théorie d'Einstein est à la fois théorie de la *relativité généralisée du mouvement*, puisqu'elle s'applique aussi aux mouvements accélérés, et *théorie relativiste de la gravitation* [voir une présentation plus détaillée chapitre 4].

Le *principe de relativité d'échelle* est une nouvelle extension du principe de relativité, appliqué cette fois non plus seulement à la position, à l'orientation et au mouvement, mais aussi aux changements d'échelle. Un tel concept s'impose également comme principe fondamental permettant de contraindre la description d'un *espace-temps non différentiable :* on entend ici par non-différentiabilité l'impossibilité de définir une dérivée (c'est-à-dire la pente d'une courbe), donc une vitesse, au sens ordinaire, et non pas celle de différentier, qui repose sur la continuité de l'espace-temps, propriété essentielle que l'on conserve dans cette approche.

À l'origine de cette théorie, il y a donc une *généralisation de la description du continuum espace-temps*. Alors que la théorie standard suppose que celui-ci est au moins deux fois différentiable (c'est-à-dire que l'on peut définir des vitesses et des accélérations), on abandonne cette hypothèse, ce qui permet de prendre en compte, en plus des espaces-temps courbes ordinaires, des espaces-temps fractals. En effet, on peut montrer qu'un espace continu mais non différentiable *dépend explicitement de l'échelle de résolution* à laquelle on le considère (dépendance qui va jusqu'à la divergence quand l'échelle tend vers zéro). Autrement dit, un continuum non différentiable se caractérise par sa *géométrie fractale.*

Ce résultat essentiel (qui est un théorème mathématique) joue un rôle fondamental dans la théorie, car il permet de construire un outil de description qui transcende la non-différentiabilité. Celle-ci a été envisagée par de nombreux mathématiciens, physiciens et philosophes des sciences comme généralisation naturelle de la description de l'espace-temps, en particulier pour tenter de fonder la théorie quantique (Riemann, Einstein, Feynman, Bachelard, Buhl, Finkelstein). Mais aucune de ces tentatives n'a pu être développée, car il semblait évident qu'abandonner la différentiabilité, c'était abandonner le calcul différentiel, alors que toutes les équations de la physique sont, depuis Newton et Leibniz, des équations différentielles.

Le théorème qui relie continuité et non-différentiabilité à la fractalité (en un sens très général de divergence d'échelle) permet de dépasser cette limitation apparente. En théorie de la relativité d'échelle, on considère les diverses quantités physiques comme fonctions explicites de variables d'échelle internes, intrinsèques à la description, que nous avons appelé résolutions (plutôt qu'« incertitudes » ou « erreurs » bien qu'elles aient un statut du même type que des barres d'erreur ou des intervalles d'incertitude). Ce choix est motivé par la signification sous-tendue par de tels concepts : on abandonne l'idée qu'on pourrait connaître un système avec un intervalle de résolution (spatial ou temporel, par exemple) nul, au profit d'une conception où toute mesure ne peut être faite qu'à intervalle de résolution finie, aussi petit soit-il. Or la non-différentiabilité est précisément une propriété qui se manifeste à la limite des intervalles d'espace et de temps tendant vers zéro. En abandonnant l'idée qu'une telle limite ait un sens, et en remplaçant la description de la limite (qui définit les dérivées au sens ordinaire) par la manière dont la grandeur considérée se conduit en tendant vers cette limite, on peut décrire des fonctions non différentiables par des équations différentielles.

En conséquence, la description physique d'un tel espace-temps continu et non différentiable n'implique pas pour autant l'abandon des équations différentielles, à condition que celles-ci agissent également sur les changements de résolution. Le formalisme mathématique consiste donc en un double calcul différentiel couplé, dans l'espace des échelles et dans l'espace-temps « ordinaire » (des positions et instants).

Première étape de construction de la théorie : lois de transformation d'échelle

En relativité d'échelle, les positions et les instants, considérés dans la théorie standard comme des points parfaits sans extension, sont vus maintenant comme structurés en échelle. Autrement dit, l'espace-temps de ces positions et instants structurés est *fractal* par définition. On dénie toute réalité physique au concept d'un instant t qui serait définissable avec un intervalle de résolution nulle $dt = 0$ (c'est-à-dire à résolution infinie). Un tel point de vue est en accord avec la mécanique quantique elle-même à travers les relations de Heisenberg, qui implique qu'une énergie infinie serait nécessaire pour faire une mesure de temps avec une incertitude nulle. Il en est de même de la position, dont la définition comme un point parfait de l'espace impliquerait la mise en œuvre d'une impulsion infinie.

La base de la nouvelle construction physico-mathématique consiste donc à considérer des « points » généralisés, dépendant explicitement de l'échelle considérée. Du point de vue expérimental, cela revient à considérer des coordonnées explicitement dépendantes de la résolution ε de l'appareil de mesure, $X = X(\varepsilon)$. Du point de vue de la description théorique, le fondement de cette description depuis Newton et Leibniz consite à considérer de petits éléments différentiels des variables : on considère alors celles-ci comme des fonctions explicites de ces éléments différentiels, $x = x(dx)$ pour l'espace et $t = t(dt)$ pour le temps.

La différence essentielle est que, dans le calcul différentiel ordinaire, on fait tendre les éléments différentiels vers zéro, *jusqu'à ce que cette limite soit atteinte.* Cette annulation des éléments différentiels interdit d'en faire des variables ordinaires. En relativité d'échelle, on fait toujours tendre ces éléments différentiels vers zéro, mais sans imposer d'aller à la limite nulle. Ce sont des éléments finis aussi petits que l'on veut qui deviennent ainsi des variables dimensionnées (des intervalles de longueur et de temps) caractérisant l'échelle relative. Autrement dit, au lieu de ne considérer que ce qui se passe à la limite du point zéro, on décrit toute l'histoire de se qui se passe en allant vers cette limite. Si cette limite peut être atteinte (cas de la différentiabilité), l'information sur celle-ci sera comprise dans la nouvelle description. Si elle ne peut pas l'être (cas nouveau de la non-différentiabilité), la description relativiste d'échelle fonctionne alors que la description du calcul différentiel ordinaire est mise en échec. Il s'agit donc d'une généralisation de la description qui contient le cas précédent comme limite, et ne peut donc en aucun cas apporter de contradiction.

Un tel cadre permet de résoudre de nombreux problèmes de la physique moderne. Il est tout à fait possible par exemple de rencontrer une fonction qui s'écrirait :

$f(x, dx) = g(x) + dx + 1/dx$

Du point de vue du calcul différentiel ordinaire, le deuxième terme disparaîtrait et le troisième serait infini, ce qui interdirait d'écrire une telle expression. Mais ici on la considère comme une fonction explicite de deux variables, x et dx, qui tend vers l'infini quand la deuxième variable dx tend vers zéro, ce qui devient parfaitement légitime. De plus si l'on considère le carré de cette fonction, on obtient :

$f^2(x, dx) = [g^2(x) + 2] + 2g(x)\, dx + dx^2 + 2g(x)/dx + 1/dx^2$

On constate ainsi que la partie finie de cette expression contient une constante supplémentaire égale à 2, qui vient du produit de deux termes qui, du point de vue standard, aurait été considéré comme non défini (0 fois l'infini). Autrement dit, des grandeurs physiques nouvelles « cachées » peuvent être générées par cette nouvelle approche. C'est effectivement le cas de propriétés fondamentales quantiques n'ayant aucune contrepartie classique, telles que l'énergie du vide ou le spin qui peuvent être construits de cette manière dans le cadre de la théorie de la relativité d'échelle[1].

Cette base de description étant établie, la première étape de construction de la théorie consiste à établir les lois de dépendance explicite des grandeurs physiques en fonction de ces variables d'échelle, qui satisfont au principe de relativité. En analogie avec les lois du mouvement, on considère que ces lois doivent être données par des équations différentielles, mais qui agissent dans l'espace des échelles.

Différents niveaux de descriptions de telles lois de transformation d'échelle sont alors physiquement possibles (voir quatrième partie) :

1. Célérier et Nottale, 2006.

invariance d'échelle, puis covariance d'échelle[1] qui inclue une relativité restreinte d'échelle, depuis l'autosimilarité la plus simple jusqu'à des lois d'échelle non linéaires (« *dynamique d'échelle* »). On retrouve ainsi les *lois fractales ordinaires — dans lesquelles la dimension fractale est constante* — comme cas les plus simples, mais aussi des *brisures de symétrie* de ces lois (mettant en œuvre des transitions entre régimes dépendant d'échelle et indépendant d'échelle), et de nombreuses généralisations où les dimensions fractales peuvent devenir variables.

Parmi les lois d'échelle obtenues dans ce cadre généralisé, certaines, comme les *lois log-périodiques*, ont été appelées à jouer un rôle particulier dans de nombreux domaines, de la physique à l'économie et des géosciences aux sciences de la vie. On obtient de telles lois comme solutions d'équations différentielles d'échelle du deuxième ordre, écrites de manière covariante : *c'est l'équivalent dans l'espace des échelles d'une équation d'onde dans l'espace ordinaire*.

À un niveau plus profond encore, il faut inclure les couplages échelle-mouvement (dans lesquels les variables d'échelle deviennent elles-mêmes des fonctions des coordonnées) qu'on identifie à des *transformations de jauge*.

Deuxième étape : mécanique quantique

Une fois établies les lois de dépendance d'échelle interne des « *points structurés* » d'un espace-temps fractal, il s'agit de construire les lois de déplacement de ces points, donc de trouver les équations du mouvement.

La deuxième étape consiste donc à décrire les effets induits sur la dynamique par les structures internes fractales des chemins possibles dans un espace-temps continu non différentiable. Ces effets transforment la mécanique classique en une mécanique de type quantique.

Pour ce faire, en analogie avec la relativité générale d'Einstein (voir formalisme : chapitre 4), on décrit les chemins comme géodésiques de l'espace-temps, c'est-à-dire comme les lignes les plus courtes (qui optimisent le temps propre). En fait on n'a pas à considérer que des particules existent, qui suivraient des géodésiques et posséderaient une masse et d'autres propriétés internes, car on peut identifier ce qu'on appelle particule (qui est aussi champ et onde) et ses propriétés (masse, spin, charges…) aux géodésiques elle-même de l'espace-temps fractal et à certaines de leurs caractéristiques géométriques.

1. Ce qui signifie une invariance de forme des lois d'échelle.

La *non-différentiabilité* implique trois conséquences principales :
1. Il existe une infinité de géodésiques là où une seule existait classiquement.
2. Chacune de ces géodésiques est une courbe fractale (c'est la dimension fractale 2 qui redonne strictement la mécanique quantique standard, mais la théorie est généralisable à d'autres valeurs). Ces deux propriétés impliquent une perte de déterminisme et une non-localité fondamentales de la description relativiste d'échelle, qui ne sont pas posées comme en mécanique quantique standard, mais qui se déduisent de la géométrie même. En effet, là ou classiquement existait une vitesse bien déterminée : $v(t)$ sur une trajectoire unique, apparaît maintenant un champ de vitesse fractale qui remplit tout l'espace et dépend explicitement de l'échelle : $V(x, t, dt)$.
3. Il y a *irréversibilité au niveau infinitésimal*, c'est-à-dire *non-invariance* dans la réflexion de l'élément différentiel temporel $dt \rightarrow -dt$, si bien que le concept de vitesse se dédouble et devient descriptible par des nombres complexes. Un tel dédoublement est une conséquence directe de la méthode de base introduite en relativité d'échelle consistant à abandonner la limite $dt \rightarrow 0$ et donc à rendre explicite la dépendance des grandeurs physiques en fonction de *dt, et ceci même dans le cas différentiable.* Montrons le sur un exemple simple :

Considérons un mouvement accéléré décrit par $x = t^2$ et calculons sa vitesse suivant la nouvelle définition des éléments différentiels comme variables explicites. On peut le faire de deux manières, qui coïncident du point de vue du calcul différentiel ordinaire :

$$V_+(t, dt) = [x(t + dt) - x(t)]/dt = [(t + dt)^2 - t^2]/dt = 2t + dt$$
$$V_-(t, dt) = [x(t) - x(t - dt)]/dt = [t^2 - (t - dt)^2]/dt = 2t - dt$$

Ainsi, à la limite $dt \rightarrow 0$ ces deux vitesses coïncident évidemment et constituent une fonction unique, mais en tant que fonctions à deux variables t et dt, ce sont des fonctions différentes.

Plus généralement, dans le cas non différentiable, la vitesse, bien que non définie au sens ordinaire peut être redéfinie comme fonction fractale explicite de la résolution (fonction qui diverge quand l'intervalle de résolution tend vers zéro, ce qui manifeste la non-différentiabilité). Même ainsi il y a maintenant deux définitions de la vitesse au lieu d'une $V_+(x, t, dt)$ et $V_-(x, t, dt)$, qui se transforment l'une dans l'autre par la réflexion $dt \rightarrow -dt$.

En analogie avec la relativité généralisée du mouvement d'Einstein, ces trois effets sont alors combinés dans la construction d'une dérivée covariante, qui inclut, dans l'opération de dérivation même, les effets de la géométrie. La covariance signifie ici que, en terme de cet outil, les équations de la physique vont pouvoir garder, dans la nouvelle géométrie, la forme qu'elles avaient auparavant. Dans le cas de covariance forte, réalisée ici, cette forme des équations est la plus simple possible, celle du mouvement libre dans le vide. On écrit alors l'équation des géodésiques en fonction de cette dérivée covariante, sous forme d'une équation du mouvement inertiel (qui exprime simplement l'annulation de la dérivée de la vitesse).

Après un changement de variables qui définit la fonction d'onde comme manifestation du champ de vitesse complexe des géodésiques, cette équation s'intègre, dans le cas d'un espace fractal (sans que le temps lui-même soit fractal), sous forme d'une équation de Schrödinger (Nottale, 1993), l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Le point essentiel de ce résultat est que l'équation de Schrödinger se déduit donc de l'équation des géodésiques d'un espace fractal, dans un cadre purement géométrique.

Cette approche se généralise au cas d'un espace-*temps* fractal avec l'établissement de l'équation de Klein-Gordon[1]. Ceci correspond à la mécanique quantique relativiste, dans laquelle des retours arrières temporels sont possibles le long des géodésiques (aux échelles de temps plus petites que l'échelle d'Einstein-Compton $\tau = \hbar/2mc^2$).

Puis la prise en compte d'autres effets plus subtils de la non-différentiabilité mène à la construction de spineurs et à la dérivation des équations de Dirac et de Pauli[2]. Les postulats de Born (la densité de probabilité est donnée par le carré du module de la fonction d'onde) et de von Neumann (réduction du paquet d'onde) peuvent également être établis dans ce cadre. Ce sont ainsi les principaux outils et postulats de la mécanique quantique ainsi que ses équations fondamentales qui sont dérivés de principes premiers dans cette théorie[3], alors qu'ils sont posés comme axiomes dans la théorie quantique actuelle.

1. Nottale, 1996a.
2. Célérier et Nottale, 2004, 2006.
3. Nottale et Célérier, 2007.