Jour n°1

Question de cours 1

Mouvement d'un satellite dans un champ gravitationnel. Lois de Kepler.
Démonstration de la deuxième et de la troisième.

Exercice 1

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement se propageant dans le vide :

$\overrightarrow{E_1} = E_0 e^{j\left(\omega t - \overrightarrow{k_1}\cdot\vec{r}\right)}\overrightarrow{u_z}$,

avec $\overrightarrow{k_1} = k\left(\cos\alpha\overrightarrow{u_x} + \sin\beta\overrightarrow{u_y}\right)$.

1) Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$.

2) On considère une deuxième onde, de même polarisation, de même phase à l'origine et de vecteur d'onde symétrique par rapport à (Ox). Calculer $\overrightarrow{k_2}$, $\overrightarrow{E_2}$ et $\overrightarrow{B_2}$.

3) En déduire les champs totaux $\overrightarrow{E_{tot}}$ et $\overrightarrow{B_{tot}}$. Caractériser l'onde obtenue et calculer la vitesse de phase, la vitesse de groupe, le vecteur densité de puissance et la densité volumique d'énergie.

Énoncé

Mouvement d'un satellite dans un champ gravitationnel. Lois de Kepler.
Démonstration de la deuxième et la troisième.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit de faire une démonstration du mouvement général d'un satellite, sans aucun point de départ fourni par l'énoncé.

↪ Il faut clairement définir le système et le référentiel d'étude, et énoncer le principe de la mécanique utilisé pour faire la démonstration.

Corrigé

Le satellite S est supposé ponctuel de masse m, et l'astre attracteur créant le champ gravitationnel est supposé à répartition sphérique de masse. Ainsi, si O est le centre de l'astre de masse M, le champ gravitationnel est :

$$\vec{g} = -\frac{G_0 M}{r^2}\vec{u}$$

avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OS}}{OS}$ et $r = OS$, G_0 étant la constante de gravitation universelle.

En considérant que l'ensemble $\{$astre + satellite$\}$ est isolé, on travaille dans le référentiel barycentrique de centre G tel que $m\overrightarrow{GS} + M\overrightarrow{GO} = \vec{0}$, qui est donc galiléen.
On a alors :

$$\frac{\overrightarrow{GS}}{\frac{1}{m}} = -\frac{\overrightarrow{GO}}{\frac{1}{M}} = \frac{\overrightarrow{GS} - \overrightarrow{GO}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M}} = \frac{\overrightarrow{OS}}{\frac{1}{\mu}} = \mu\vec{r}.$$

En posant $\vec{r} = \overrightarrow{OS}$ et en définissant la masse fictive :

$$\mu = \frac{mM}{m+M},$$

le principe fondamental permet de se ramener à l'étude d'une particule fictive P de masse μ, définie par $\vec{r} = \overrightarrow{GP}$.

En effet :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GS} = \dfrac{\mu}{m}\vec{r} \\ \overrightarrow{GO} = -\dfrac{\mu}{M}\vec{r} \end{cases}$$

or, d'après le principe fondamental :

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\overrightarrow{GS}}{dt^2} = \vec{F}_{O\to S} \\ M\dfrac{d^2\overrightarrow{GO}}{dt^2} = \vec{F}_{S\to O} \end{cases},$$

donc :

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{O\to S} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u}.$$

Les trajectoires de S et O se déduisent de celle du point fictif P, par les homothéties précédentes.

Le moment cinétique du système étant aussi celui du point fictif, $\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}$, le théorème du moment cinétique donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{O\to S} = \vec{0}.$$

Ainsi, la trajectoire est dans un plan passant par G et perpendiculaire à $\vec{L}$.

En travaillant en coordonnées polaires dans ce plan, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GP} = r\vec{u} \\ \vec{v} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u} + r\dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} \end{cases},$$

donc :

$$\vec{L} = \mu r^2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_z},$$

ce qui permet de définir la constante des aires :

$$C = \frac{L}{\mu} = r^2\frac{d\theta}{dt} = cste.$$

Notons que cette constante se détermine avec les conditions initiales (position et vitesse).

La constante des aires permet d'utiliser les formules de Binet, dont la formule de l'accélération est :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)\vec{u}.$$

Le principe fondamental s'écrit alors :

$$-\mu\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right)\vec{u}=-\frac{GmM}{r^2}\vec{u},$$

ce qui se simplifie selon :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{GmM}{\mu C^2}=\frac{1}{p},$$

dont la solution est :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+A\cos(\theta+\varphi).$$

En posant $A=\frac{e}{p}$, on a directement :

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta+\varphi)}.$$

La trajectoire est une conique de paramètre p et d'excentricité e. Le foyer est le barycentre G du système {astre + satellite}, ce qui constitue la première loi de Kepler.
On peut noter que le foyer est confondu avec l'astre si sa masse est très grande devant la masse du satellite.

La deuxième loi de Kepler est la loi des aires, qui se démontre en calculant la surface élémentaire :

$$dS=\frac{1}{2}r^2d\theta.$$

Donc,

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{2}.$$

Ainsi, la surface balayée par le rayon vecteur est la même pendant des durées égales.
Cette loi est valable quelle que soit la nature de la trajectoire (ellipse, cercle, parabole ou hyperbole).

Dans le cas où la conique est une ellipse, la trajectoire est fermée, donc il est possible de calculer sa surface :

$$S=\pi ab,$$

où a est le demi grand axe, et b le demi petit axe.

Le demi grand axe s'exprime selon :

$$r_{\min}+r_{\max}=2a=\frac{p}{1+e}+\frac{p}{1-e}=\frac{2p}{1-e^2}.$$

Le demi petit axe peut s'exprimer autrement, en utilisant les formules de l'ellipse :

$$\begin{cases} c = ea \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

d'où :

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2\left(1 - e^2\right) = a^2 \frac{p}{a} = pa.$$

Comme la surface est aussi, d'après la loi des aires, $S = \dfrac{CT}{2}$, on peut exprimer la période du satellite selon :

$$T = \frac{2}{C}\pi ab = \frac{2}{C}\pi a\sqrt{pa},$$

soit :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{C^2}a^3 p.$$

En utilisant la valeur de p obtenue précédemment, on obtient :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{C^2}p = \frac{4\pi^2}{C^2}\frac{\mu C^2}{GmM} = \frac{4\pi^2}{G(m+M)},$$

ce qui constitue la troisième loi de Kepler (loi des périodes).

Remarques

- Il est possible d'obtenir l'équation du mouvement autrement qu'en utilisant la formule de Binet et le principe fondamental, mais en calculant l'énergie mécanique du système, laquelle est constante.

- Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire (donc uniforme), les deuxième et troisième lois de Kepler se démontrent beaucoup plus facilement dans la base de Frenet.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que le système, le référentiel et le principe de mécanique utilisé doivent toujours être présentés dans un problème de mécanique.

> Rapport du jury 2007
>
> La définition du système et du référentiel d'étude, la discussion argumentée de la méthode à utiliser compte tenu de la question posée devraient être systématiquement à l'initiative de l'élève !

Formulaire

- Dans la base polaire, les formules de Binet sont :

$$\vec{v} = C\left(-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u} + \frac{1}{r}\overrightarrow{u_\theta}\right),$$

$$\vec{a} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)\vec{u}.$$

Énoncé

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement se propageant dans le vide :

$$\overrightarrow{E_1} = E_0 e^{j\left(\omega t - \overrightarrow{k_1}.\vec{r}\right)} \overrightarrow{u_z}$$

avec $\overrightarrow{k_1} = k\left(\cos\alpha\overrightarrow{u_x} + \sin\beta\overrightarrow{u_y}\right)$.

1) Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$.

2) On considère une deuxième onde, de même polarisation, de même phase à l'origine et de vecteur d'onde symétrique par rapport à (*Ox*). Calculer $\overrightarrow{k_2}$, $\overrightarrow{E_2}$ et $\overrightarrow{B_2}$.

3) En déduire les champs totaux $\overrightarrow{E_{tot}}$ et $\overrightarrow{B_{tot}}$. Caractériser l'onde obtenue et calculer la vitesse de phase, la vitesse de groupe, le vecteur densité de puissance et la densité volumique d'énergie.

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice porte sur la superposition de deux ondes planes progressives se propageant dans le vide.

1) Il s'agit de calculer le champ magnétique connaissant le champ électrique.

↪ Cette question est classique, il suffit d'utiliser le trièdre direct reliant les champs électrique et magnétique au vecteur d'onde.

2) Il faut d'abord calculer le vecteur d'onde et le champ électrique avant d'en déduire le champ magnétique.

↪ L'interprétation de l'énoncé est primordiale : les informations données sur la symétrie, la phase et la polarisation permettent d'écrire immédiatemment le vecteur d'onde et le champ électrique.

3) Il y a beaucoup de calculs à faire. Le calcul correct des champs totaux conditionne tous les autres calculs et les interprétations physiques qui en découlent.

↪ Cette question très calculatoire peut être simplifiée en introduisant des grandeurs intermédiaires, comme les composantes des champs. Ne pas oublier que les calculs relatifs à l'énergie doivent se faire en notation réelle !

Corrigé

1) L'onde étant plane progressive et monochromatique, on calcule le champ magnétique avec :

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{E_1}}{\omega},$$

ce qui donne avec $\frac{\omega}{k} = c$ (on est dans le vide) :

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{k}{\omega}\begin{vmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0 \\ 0 \\ \underline{E_1}\end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix}\sin\alpha \underline{E_1} \\ -\cos\alpha \underline{E_1} \\ 0\end{vmatrix},$$

en posant :

$$\underline{E_1} = E_0 e^{j(\omega t - k\cos\alpha x - k\sin\alpha y)}.$$

Notons que les calculs sont plus légers en introduisant les composantes complexes comme $\underline{E_1}$. Non seulement l'écriture du champ magnétique est plus simple, mais les grandeurs réelles associées (nécessaires plus loin) seront ainsi directement obtenues.

2) Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k_2}$ étant le symétrique de $\overrightarrow{k_1}$ par rapport à (Ox), il s'écrit :

$$\overrightarrow{k_2} = k\left(\cos\alpha \overrightarrow{u_x} - \sin\beta \overrightarrow{u_y}\right).$$

Le champ électrique $\overrightarrow{E_2}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{E_2} = E_0 e^{j\left(\omega t - \overrightarrow{k_2}.\vec{r}\right)} \overrightarrow{u_z}.$$

Il n'y a pas de déphasage à rajouter car les deux ondes ont la même phase si $\vec{r} = \vec{0}$.

Le champ magnétique se calcule comme précédemment :

$$\overrightarrow{B_2} = \frac{k}{\omega}\begin{vmatrix}\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0 \\ 0 \\ \underline{E_2}\end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix}-\sin\alpha \underline{E_2} \\ -\cos\alpha \underline{E_2} \\ 0\end{vmatrix},$$

avec :

$$\underline{E_2} = E_0 e^{j(\omega t - k\cos\alpha x + k\sin\alpha y)}.$$

3) Le champ électrique total est :

$$\overrightarrow{E_{tot}} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}.$$