1.1 Calcul d'une somme

L'objectif de ce TP est le calcul d'une valeur approchée au centième de la somme des inverses des nombres entiers de 1 à 1000.

❖ *Les questions*

1) **Expérimentations**

a) Quel est l'inverse de 1 ? de 2 ? de 3 ?

b) Calculer la somme des inverses des nombres entiers de 1 à 3.

c) A l'aide d'un tableur, déterminer l'arrondi au centième de la somme des inverses des nombres entiers de 1 à 15.

2) **L'algorithme**

a) Quel est le rôle de l'algorithme suivant ? Qu'obtiendrait-on après son exécution ?

```
Variables : S,k (nombres)
Début
 |S prend la valeur 0
 |Pour k de 1 à 10 Faire
 | |S prend la valeur S+k
 |FinPour
 |Afficher S
Fin
```

b) Modifier cet algorithme de sorte qu'il permette de résoudre le problème.

3) **Implémentation et conclusion**

a) Implémenter en Scratch l'algorithme modifié.

b) Exécuter le programme puis conclure.

Corrigé

1) a) Les inverses de 1, 2 et 3 sont respectivement 1/1 = 1, 1/2 = 0,5 et 1/3.

b) La somme des inverses des nombres entiers de 1 à 3 est :

$$1/1 + 1/2 + 1/3 = 6/6 + 3/6 + 2/6 = 11/6$$

c) Avec un tableur, on a édité une feuille de calcul (figure 1.1) dans laquelle on a saisi :

- 0 dans la cellule B2,
- 1 dans la cellule A3, avant de l'étirer vers le bas,
- puis « =B2+1/A3 » dans la cellule B3, avant de l'étirer vers le bas.

On a alors obtenu une valeur approchée de la somme cherchée dans la cellule B17 (figure 1.1). On en déduit que l'arrondi au centième de la somme des inverses des nombres entiers de 1 à 15 est 3,32. On a donc :

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/14 + 1/15 \approx 3{,}32 \quad \text{(à 0,01 près)}$$

	A	B
1		somme
2		0
3	1	1
4	2	1,5
5	3	1,833333333
6	4	2,083333333
7	5	2,283333333
8	6	2,45
9	7	2,592857143
10	8	2,717857143
11	9	2,828968254
12	10	2,928968254
13	11	3,019877345
14	12	3,103210678
15	13	3,180133755
16	14	3,251562327
17	15	3,318228993

Figure 1.1

2) a) L'algorithme détermine puis affiche la somme des nombres entiers de 1 à 10, c'est-à-dire 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.
En exécutant cet algorithme on obtiendrait donc l'affichage « 55 ».

b) Algorithme modifié :

```
Variables : S,k (nombres)
Début
 |S prend la valeur 0
 |Pour k de 1 à 1000 Faire
 | |S prend la valeur S + 1/k
 |FinPour
 |Afficher S
Fin
```

3) a) Implémentation Scratch (on a créé au préalable les variables `S` et `k`)

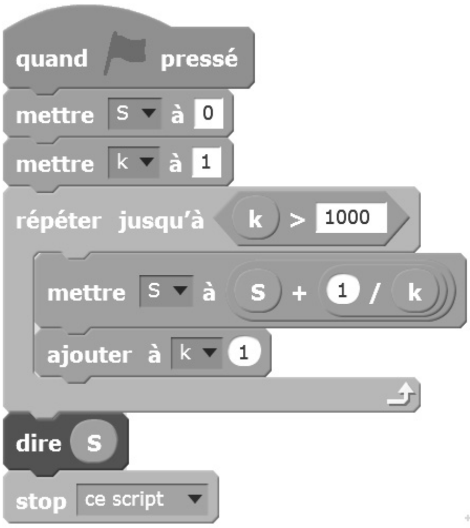

Figure 1.2

b) Après exécution on obtient l'affichage « 7.49 » (figure 1.3).

Conclusion : la somme des inverses des nombres entiers de 1 à 1000 vaut environ 7,49.

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/999 + 1/1000 \approx 7{,}49 \text{ (à 0,01 près)}$$

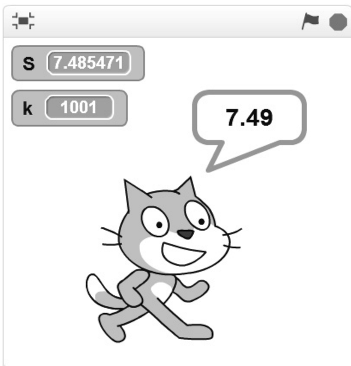

Figure 1.3

1.2 Dénombrement

35866 est un nombre entier de 5 chiffres dont la somme vaut 28.
L'objectif de ce TP est de déterminer combien de nombres ont cette propriété, que l'on appellera par la suite « propriété $\mathcal{P}$ ».

❖ Les questions

1) Pour chacun des nombres suivants, dire s'il vérifie la propriété $\mathcal{P}$ (justifier).

a) 8801,9
b) 70777
c) 415819

2) a) Quel est le plus petit nombre vérifiant la propriété $\mathcal{P}$?

b) Quel est le plus grand nombre vérifiant la propriété $\mathcal{P}$?

3) a) Compléter l'algorithme suivant de sorte qu'après exécution, on obtienne l'affichage de la somme des chiffres de `N`.

```
Variables : k,S,N (nombres)
Début
 |N prend la valeur 50437
 |S prend la valeur 0
 |Pour k de ... à ... Faire
 | |S prend la valeur S + ... ème chiffre de N
 |FinPour
 |Afficher S
Fin
```

b) Compléter l'algorithme suivant de sorte qu'après exécution, la variable `compt` compte combien de nombres vérifient la propriété $\mathcal{P}$.

```
Variables : N,compt (nombres)
Début
 |Pour N de ... à ... Faire
 | |Si la somme des chiffres de N vaut ... Alors
 | | |compt prend la valeur ...
 | |FinSi
 |FinPour
Fin
```

4) a) Compléter le programme Scratch suivant de sorte qu'il permette de résoudre le problème.

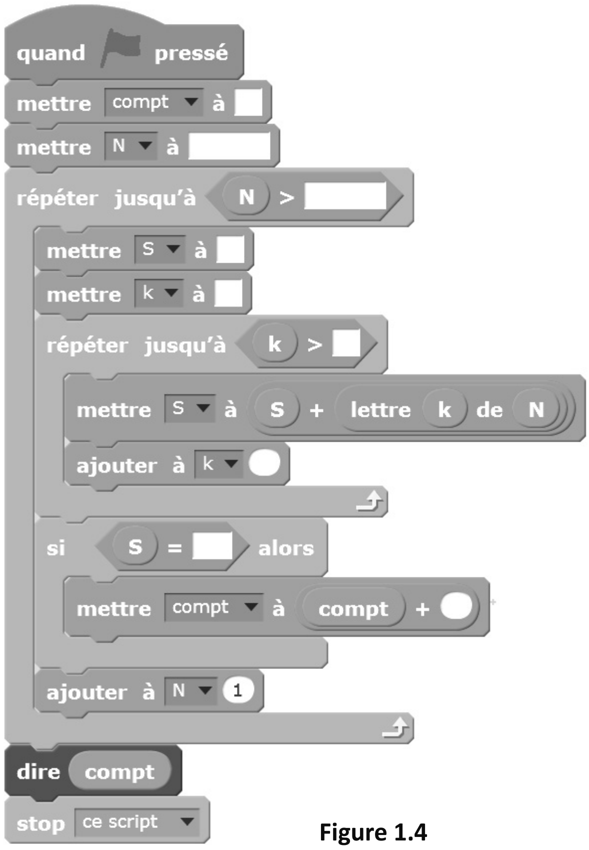

Figure 1.4

b) Éditer et exécuter ce programme puis conclure.

Corrigé

1) a) Le nombre 8801,9 ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$ car il n'est pas entier.

b) Le nombre 70777 vérifie la propriété $\mathcal{P}$ car c'est un nombre entier de cinq chiffres dont la somme est 7 + 0 + 7 + 7 + 7 = 28.

c) Le nombre 415819 ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$ car ce nombre entier ne possède pas cinq chiffres.

2) a) Le plus petit nombre vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ est 10999.

b) Le plus grand nombre vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ est 99910.

3) a)

```
Variables : k,S,N (nombres)
Début
  N prend la valeur 50437
  S prend la valeur 0
  Pour k de 1 à 5 Faire
    S prend la valeur S + kème chiffre de N
  FinPour
  Afficher S
Fin
```

b)

```
Variables : N,compt (nombres)
Début
  Pour N de 10999 à 99910 Faire
    Si la somme des chiffres de N vaut 28 Alors
      compt prend la valeur compt + 1
    FinSi
  FinPour
Fin
```

4) a)

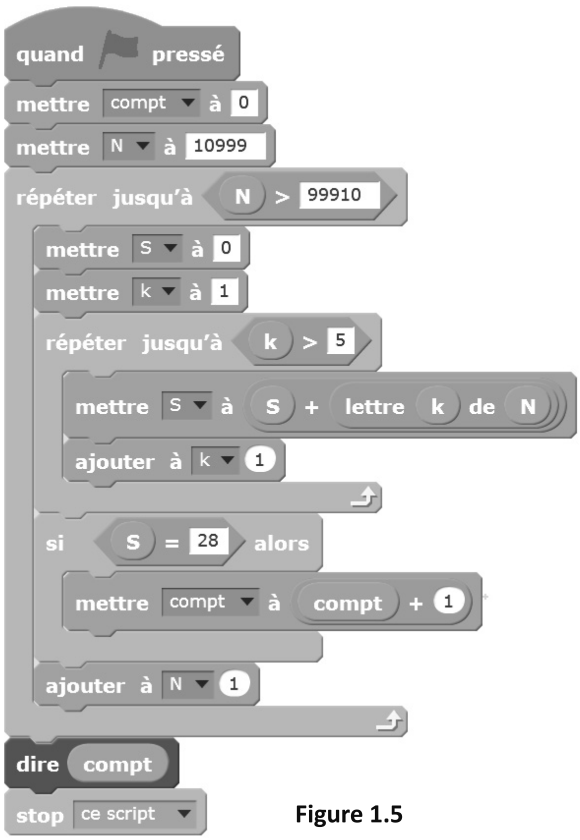

Figure 1.5

b) Après exécution du programme, on obtient l'affichage « 4170 » (figure 1.6).

Conclusion : il existe au total 4170 nombres entiers de 5 chiffres dont la somme vaut 28.

Figure 1.6

1.3 Nombres premiers jumeaux

Un nombre entier positif est dit **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Par exemple :

- 1 n'est pas premier (il n'admet qu'un seul diviseur : 1),
- 2 est premier (ses diviseurs sont 1 et 2),
- 4 n'est pas premier (il possède trois diviseurs : 1, 2 et 4).

Il existe une infinité de nombres premiers.
Les nombres premiers inférieurs à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Le couple (3;5) est formé de deux nombres premiers qui ne diffèrent que de 2, on dit qu'il s'agit d'un couple de **nombres premiers jumeaux**.

Par exemple :

- (19;21) n'est pas un couple de nombres premiers jumeaux car 21 n'est pas premier.
- (3;7) n'est pas un couple de nombres premiers jumeaux car 3 et 7 diffèrent de 4 et non de 2.
- (5;7) est un couple de nombres premiers jumeaux de un chiffre.
- (41;43) est un couple de nombres premiers jumeaux de deux chiffres.
- (107;109) est un couple de nombres premiers jumeaux de trois chiffres.

Le but de ce TP est de dresser la liste de tous les couples de nombres premiers jumeaux de trois chiffres.

❖ *Les questions*

1) Déterminer tous les couples de nombres premiers jumeaux :

a) de un chiffre,
b) de deux chiffres.

2) a) Compléter la propriété suivante :

« Un nombre entier N supérieur à 2 est premier si et seulement s'il est impossible de trouver un diviseur de N compris entre ... et ... ».

b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine si un nombre entier supérieur à 2 saisi par l'utilisateur est premier ou non.