Liste et description des problèmes

Bases des mathématiques

On commence par deux problèmes de logique. Ils peuvent être abordés dès le début de l'année et vous permettront de travailler les méthodes de raisonnement et le langage mathématique.

Problème 1. Les feux de l'amour

- *difficulté :* facile
- *durée :* 2 h
- *thèmes :* logique
- *description :* Le langage et la logique mathématiques peuvent être utilisés dans n'importe quel contexte. Dans votre vie étudiante puis professionnelle, vous les appliquerez à l'analyse, l'algèbre, la géométrie, la physique, l'économie... Mais en attendant, voici un problème sur un thème n'ayant absolument rien de scientifique. Le but est de travailler la phrase mathématique, en utilisant quantificateurs et relations.

Problème 2. Le théorème du dictateur

- *difficulté :* très difficile
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* logique
- *description :* Le but de ce problème est d'étudier la théorie dite « du choix social ». Nous prenons l'exemple d'une élection. Chaque électeur classe les candidats selon ses préférences personnelles, mais ensuite, comment décider du vainqueur de l'élection ? La recherche du système de vote idéal a conduit au théorème qu'on présente ici et qui a valu un prix Nobel [1] à son auteur.
  La démonstration de ce théorème est difficile, mais ne fait appel qu'à des notions élémentaires de logique sur les ensembles et les entiers, c'est pourquoi ce problème est placé en début d'ouvrage. Cependant, si vous avez du mal en début d'année, pensez à y revenir plus tard, éventuellement en seconde année, pour (re)travailler la logique pure et le raisonnement, et mesurer vos progrès !
  La première partie étudie quelques exemples, elle est plus simple et intéressante

1. D'économie ! Vous n'ignorez pas qu'il n'existe pas de prix Nobel de maths...

en elle-même.

On poursuit par deux petits problèmes sur les nombres complexes. Tous deux proposent d'utiliser l'interprétation géométrique des nombres complexes, d'une part car cela permet quelques preuves simples et élégantes de petits théorèmes intuitifs de géométrie plane, et d'autre part car c'est souvent là le point faible des étudiants à l'issue de la terminale.

Problème 3. Autour du losange

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 4 h
- *thèmes :* nombres complexes, géométrie, logique
- *description :* On prouve et utilise quelques propriétés élémentaires des losanges au moyen des nombres complexes. Ces propriétés vous sont certainement connues, mais vous n'en aviez peut-être jamais fait une démonstration complète. Voici l'occasion !
  Le problème est constitué de trois exercices plus ou moins indépendants et de difficulté grosso modo croissante. Une partie plus technique est signalée par trois étoiles, vous pouvez en admettre les résultats pour traiter la suite.
  Il vous permettra de travailler l'interprétation géométrique des nombres complexes, et plus techniquement les calculs au moyen de l'exponentielle complexe et de la trigonométrie. Quelques problèmes intéressants de logique se posent, il faudra faire attention à ne pas oublier de cas particuliers...

Problème 4. Construction d'un pentagone régulier

- *difficulté :* facile
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* nombres complexes, polynômes, géométrie
- *description :* Vous avez toujours rêvé de savoir partager une tarte en cinq parts égales d'un coup de compas ? Ce problème est pour vous ! Concrètement, on présente la méthode classique pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas, en calculant puis en traçant $\cos(2\pi/5)$.
  Ce sera l'occasion de refaire un peu de trigonométrie et de travailler l'interprétation géométrique des nombres complexes. En outre, une partie supplémentaire présente une seconde méthode pour calculer $\cos(2\pi/5)$, vous aurez un premier aperçu de la notion de polynôme, notion que vous étudierez en détail dans un chapitre ultérieur.

Analyse

Le chapitre des suites est l'occasion d'aborder des problèmes ayant plus d'ampleur. Les deux problèmes que voici sont tous les deux issus de la biologie : ils étudient des évolutions de populations. Le premier calcule des probabilités, mais le cours de terminale peut suffire. Le second, plus complexe, permet de passer en revue différents cas de figure lors de l'étude d'une suite déterminée par une relation de récurrence.

Problème 5. Le modèle de Galton-Watson

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* suites, probabilités
- *description :* On étudie la probabilité d'extinction d'une espèce animale, ce qui se ramène vite à l'étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Les difficultés sont concentrées dans la première partie, qui utilise des probabilités conditionnelles. Cependant, les connaissances nécessaires sont incluses dans le cours de terminale. La partie sur les suites est simple et extrêmement guidée ; retenez la démarche car vous devrez savoir la reproduire seul dans d'autres contextes.

Problème 6. Modélisation de populations (suite logistique)

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* suites
- *description :* Voici deux des premières modélisations qui furent proposées par les biologistes pour l'étude des variations de population d'une espèce animale dans un milieu donné. La première est mathématiquement évidente, la seconde au contraire donne des comportements très complexes, que nous commencerons à étudier. Le problème étudie différentes situations, dans des parties largement indépendantes et de difficulté croissante. Le sujet est conçu pour être résolu uniquement à l'aide du cours sur les suites et du cours de lycée sur les fonctions polynomiales du second degré. Cependant, deux questions peuvent être traitées plus efficacement si vous avez déjà étudié le théorème des accroissements finis.

Voici ensuite un problème utilisant la continuité. Il est adapté d'un sujet de concours, pas tout à fait évident mais bien guidé. Il fait intervenir également la notion délicate de borne inférieure, dont la maîtrise est plutôt réservée aux meilleurs étudiants…

Problème 7. Équation fonctionnelle du cosinus

- *difficulté :* difficile
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* continuité, suites, intégration

- *description :* Problème issu du concours des « Petites Mines ». On cherche à déterminer les fonctions f vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.
  Le problème est détaillé et bien guidé, mais utilise des notions plutôt fines comme les bornes inférieures ou la densité. La dernière partie est indépendante des précédentes et propose de retrouver le résultat par le calcul intégral. Le reste du sujet peut être traité sans avoir vu le chapitre sur l'intégration.

Les deux problèmes qui suivent étudient dans deux situations différentes la méthode de Newton au programme du cours d'informatique. Si vous êtes en forme choisissez le problème 9, sinon (ou si vous préférez commencer par vous échauffer) traitez le 8. Dans les deux cas, vous mènerez des études de fonctions et travaillerez le théorème clé du chapitre sur la dérivation, à savoir le théorème des accroissements finis.

Problème 8. Calcul approché de racines par la méthode de Newton

- *difficulté :* facile
- *durée :* 4 h
- *thèmes :* dérivation, suites, informatique, méthode de Newton, boucles
- *description :* On applique la méthode de Newton au calcul d'une racine carrée. On mène une analyse assez fine de la vitesse de convergence, le but étant de déterminer un test précis et efficace pour savoir quand arrêter l'algorithme. Vous verrez au passage la méthode employée par les calculatrices pour calculer les racines carrées.
  Dans ce problème, vous travaillerez les méthodes classiques d'études de suites définies par une relation de récurrence, ainsi que l'inégalité des accroissements finis, et vous en profiterez pour revoir la définition de la convergence d'une suite. Enfin, en menant sur cet exemple simple une étude théorique de la méthode de Newton plus poussée que lors du cours d'informatique, vous pourrez compléter votre vision de celui-ci.
  Quelques questions utilisent les notations de Landau, et le développement limité d'ordre 1. Cependant, si vous ne les avez pas encore étudiés, vous pouvez sauter les questions correspondantes sans dommage pour la suite du problème.

Problème 9. Calcul d'un taux d'intérêt par la méthode de Newton

- *difficulté :* difficile
- *durée :* 4 h
- *thèmes :* suites, dérivation, polynômes, informatique, méthode de Newton, complexité
- *description :* On explique ici comment calculer le taux d'intérêt d'un prêt (le fameux TAEG) en connaissant les mensualités et le capital emprunté. Le calcul exact est impossible, nous utilisons la méthode de Newton pour obtenir une valeur approchée.
  Cet exemple est plus complexe que celui du problème 8, vous mènerez le calcul complet de la vitesse de convergence, et donc de la complexité de cette méthode.

Quelques questions utilisent le cours sur les polynômes, mais il est tout à fait possible de les sauter en en admettant le résultat si vous n'avez pas encore traité ce chapitre.

Avant de passer à la suite du programme, on propose un problème de révision, plus difficile, de type sujet de concours.

Problème 10. Équation fonctionnelle de la tangente hyperbolique

- *difficulté :* difficile
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* suites, dérivation, équations différentielles, continuité
- *description :* Le cœur de ce problème est de résoudre une équation fonctionnelle. Le raisonnement utilise plusieurs suites récurrentes, il est assez long et subtil, il faudra bien garder en tête les diverses définitions et questions intermédiaires.
  Une première partie décrit la fonction argument tangente hyperbolique. Elle permet notamment de revoir les principaux théorèmes sur les fonctions réciproques.
  La deuxième partie étudie une équation différentielle. Elle est indépendante du reste du problème, qui peut donc être traité sans avoir vu le chapitre sur les équations différentielles.
  En résumé, c'est un bon problème de révision pour totue la première partie du cours d'analyse. Ce sujet est classique et a été notamment posé au concours des « Petites Mines ».

Les deux problèmes suivants traitent d'intégration. Le premier est relativement simple une fois le cours bien assimilé, le second est un peu plus technique et à vocation informatique.

Problème 11. Intégrale et prolongement par continuité

- *difficulté :* facile
- *durée :* 1 h
- *thèmes :* intégration, développements limités, continuité
- *description :* On cherche à intégrer une fonction qui n'est a priori pas définie sur le segment d'intégration... Le principe sera de procéder à un prolongement par continuité.
  Vous travaillerez donc l'intégration d'un point de vue un peu théorique, déjà dans l'esprit du cours de seconde année. Pas de difficulté particulière à prévoir, les calculs sont simples et le sujet est très guidé.

Problème 12. La méthode de Simpson pour le calcul intégral

- *difficulté :* difficile
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* intégration, développements limités, informatique, calcul approché d'intégrales, complexité

- *description :* Vous avez vu ou vous verrez en cours d'informatique les méthodes des rectangles et des trapèzes pour calculer une valeur approchée d'une intégrale. On présente ici la méthode de Simpson, amélioration naturelle des deux précédentes. Après explication de la méthode et quelques généralités, on s'attache à étudier sa précision, en s'appuyant sur les formules de Taylor.

Pour conclure sur la partie analyse du programme, un problème sur les équations différentielles et un autre sur les séries et les probabilités.

Problème 13. Un système d'équations différentielles

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 2 h
- *thèmes :* équations différentielles, matrices, intégration, développements limités
- *description :* On résout un système d'équations différentielles par changement de base. Les coefficients ne sont pas constants, mais la base l'est. Voici un problème dont le but clairement affiché est de vous faire travailler le calcul. Vous rencontrerez équations différentielles, intégrations, développements limités, et changement de bases. Le calcul n'est peut-être pas la part la plus passionnante des maths, mais il faut passer par là !
  Le principe d'un changement de base pour résoudre un système d'équation différentielles est une méthode fréquente, que vous retrouverez notamment dans les problèmes 15 et 17 et, sous une forme légèrement différente, dans les problèmes 21 et 22, et que vous étudierez de manière plus systématique en seconde année.

Problème 14. Espérance dans un jeu vidéo

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 2 h
- *thèmes :* probabilités, séries, preuves de programmes
- *description :* En guise de petit aperçu de ce qui vous attend en seconde année, voici un calcul d'espérance au moyen d'une série. On propose ensuite deux variantes, et l'on s'aidera d'un ordinateur lorsque les calculs deviendront trop complexes, à la manière de nombreux probabilistes.
  L'étude de séries est très détaillée, pour bien insister sur les différents petits résultats de ce chapitre. Les principales méthodes utilisées en première année interviennent dans cet exemple. Vous rencontrerez des séries télescopiques, des comparaisons à une série de Riemann, et la formule de Taylor avec reste intégral.
  Lors de la partie informatique finale, il faudra être précautionneux sur les indices (ne pas mélanger i avec i-1 ...). C'est une bonne occasion de travailler les invariants de boucles, pour vérifier que le programme écrit est correct.

Algèbre

Les deux premiers problèmes d'algèbre utilisent uniquement le calcul matriciel, ils peuvent donc être traités avant d'avoir vu le cours sur les espaces vectoriels.

Problème 15. Deux circuits RLC

- *difficulté :* facile
- *durée :* 2 h
- *thèmes :* matrices, équations différentielles, physique
- *description :* L'étude d'un circuit électrique conduit à deux équations différentielles couplées, que l'on va résoudre par des méthodes matricielles. Pas de difficulté théorique à prévoir, mais il faudra être attentif aux erreurs de calcul. La spécificité de ce problème est que les matrices utilisées seront de format 4×4, et qu'on ne pourra pas se ramener à des matrices complètement diagonales comme c'est souvent le cas. Aucune notion d'algèbre linéaire n'est nécessaire.

Problème 16. La méthode pageRank de tri des pages Internet

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 3 h
- *thèmes :* probabilités, matrices, complexité
- *description :* On présente la méthode de tri des pages Internet, mise au point par Larry Page, créateur de Google, qui lui a permis d'écraser ses concurrents. Nous l'appliquons ici sur un exemple extrêmement simple, ce qui permet de mener tous les calculs à la main. Cependant, on présente autant que possible des principes et des démonstrations, valables en toute généralité.
  Ce problème ne nécessite que les notions élémentaires sur les matrices et les probabilités, et pourrait être traité à la sortie de la terminale si vous avez suivi la spécialité maths.

Suivent deux problèmes travaillant le cœur du cours d'algèbre linéaire. Ensuite, le problème 19 est un sujet adapté d'annales mêlant l'algèbre linéaire et les polynômes.

À propos de polynômes : suivant l'esprit du programme, il n'y a pas de sujet portant uniquement sur ce chapitre. Vous pourrez les étudier, outre le problème 19 qui les combine aux espaces vectoriels, via les problèmes 23 et 26 qui les mêlent aux déterminants et à la géométrie euclidienne respectivement.

Problème 17. Étude de trois ressorts couplés

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 4 h
- *thèmes :* espaces vectoriels, matrices, physique
- *description :* Étude d'un problème physique qui aboutit à deux équations différentielles couplées. On procède au découplage en découpant l'espace en somme de deux espaces supplémentaires sur lesquels l'équation est très simple. C'est en fait la méthode usuelle dite de « décomposition en sous-espaces propres » que vous étudierez en détail en seconde année.
Ce problème n'est pas très difficile bien qu'un peu long et vous permettra d'utiliser la plupart des notions élémentaires d'algèbre linéaire en dimension finie sur un exemple simple et concret, et d'en voir certaines applications à la physique.
Nous utiliserons des matrices de format 2×2, et l'espace vectoriel considéré sera $\mathbb{R}^2$, vous serez donc en terrain connu. Cependant, l'énoncé propose autant que possible d'utiliser des méthodes qui seront applicables en toute dimension. Le fait que tous les calculs puissent être faits à la main sans difficulté vous permettra de vérifier les résultats que vous aurez obtenus de manière plus théorique.
Signalons enfin que ce problème utilise un peu les matrices mais se place plutôt du point de vue des applications linéaires. Le but est d'aborder la situation d'un autre point de vue qu'aux problèmes 13, 15 ou 16, bien que le principe soit au fond toujours le même. Concrètement, il est inutile d'avoir étudié les changements de bases, et les questions concernant la matrice d'une application linéaire peuvent être sautées sans dommage. Seul le chapitre de calcul matriciel du premier semestre est vraiment nécessaire.

Problème 18. Matrices semi-magiques

- *difficulté :* difficile
- *durée :* 4 h
- *thèmes :* matrices, espaces vectoriels
- *description :* Les matrices semi-magiques sont celles dont la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne est toujours la même. On étudiera ici une caractérisation des matrices semi-magiques au moyen du produit matriciel et on l'utilisera pour déterminer une base de l'ensemble de ces matrices. En guise d'application, on utilisera ces résultats pour compléter des matrices en matrices semi-magiques. Ce sujet permet de travailler la plupart des notions d'algèbre linéaire, à un niveau de difficulté un peu plus élevé que le problème 17.

Problème 19. Suites vérifiant une relation de récurrence polynomiale

- *difficulté :* moyen
- *durée :* 4 h
- *thèmes :* polynômes, espaces vectoriels
- *description :* Problème issu des « Petites Mines ». On étudie des suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + P(n)$, où P est un