Première partie

EXERCICES À LA FERMI

Chapitre 1

Historique

Enrico Fermi (1901 – 1954) est un physicien italien dont les recherches servirent de socle à l'exploitation de l'énergie nucléaire. Lauréat du prix Nobel de physique en 1938 pour sa démonstration de l'existence de nouveaux éléments radioactifs produits par le bombardement de neutrons et pour sa découverte des réactions nucléaires créées par les neutrons lents. Il fut également lauréat de la médaille Hughes en 1942, de la médaille Franklin en 1947 et du prix Rumford en 1953.

En physique et d'autres sciences, une estimation de Fermi ou exercice de Fermi, est un problème d'estimation conçu pour enseigner la manière de faire des approximations correctes, sans données précises mais à partir d'hypothèses judicieusement choisies.

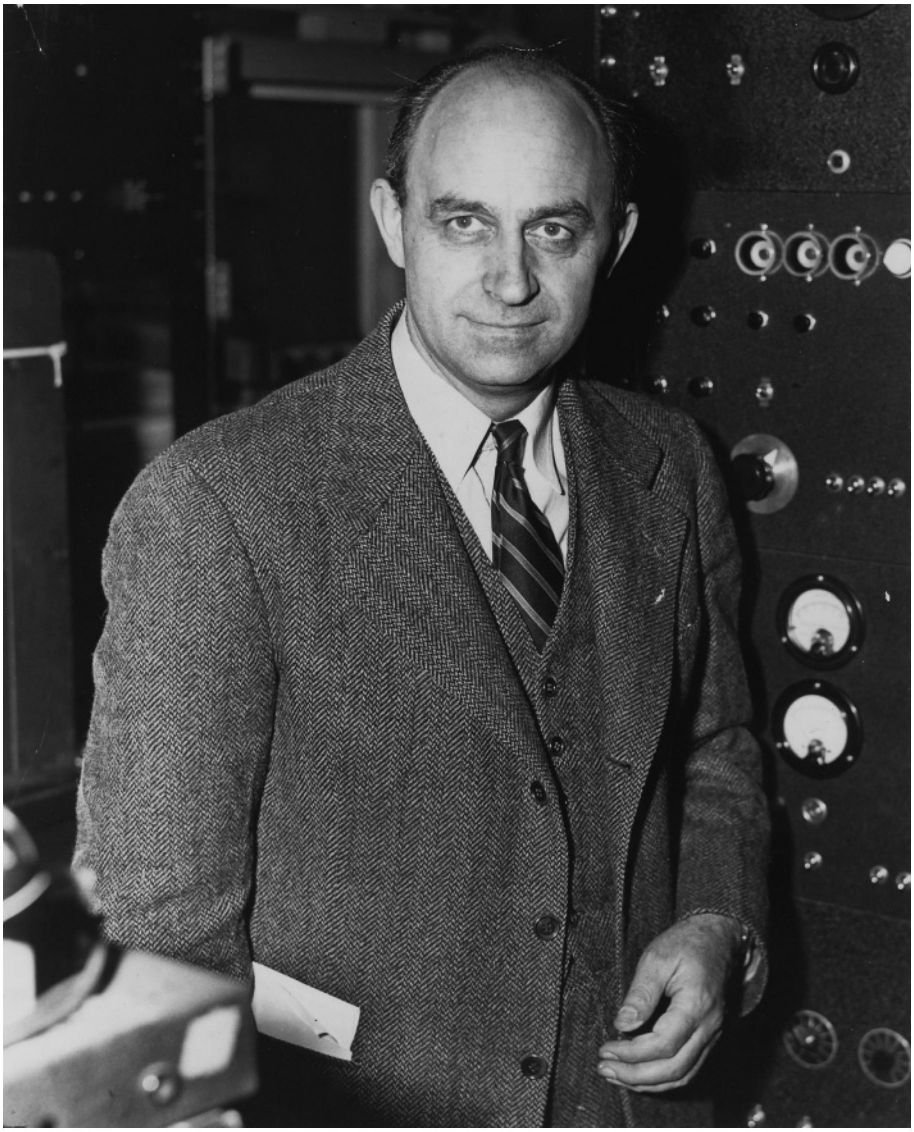
Enrico Fermi aimait poser ce genre de questions à ses étudiants. En anglais, on appelle aussi ce genre d'estimation *back of the envelope calculation* ou *back of the napkin calculus*, ceci faisant référence à la manière rapide d'effectuer un calcul grossier sur le premier bout de papier qui vous tombe sous la main en vue d'obtenir un résultat approximatif.

Le problème des accordeurs de piano est un problème de Fermi classique, qu'on attribue en général à Fermi lui-même :

« Combien y a-t-il d'accordeurs de piano à Chicago ? »

La solution classique consiste à multiplier une série d'estimations, ce qui mène à une réponse acceptable si les estimations sont raisonnables.

Une des particularités de ces problèmes étant qu'en général, les données sont à estimer par soi-même, contrairement aux problèmes élémentaires du même genre où les données sont dictées par l'énoncé.



Enrico Fermi

Chapitre 2

Intérêt à Sciences-Po

L'objet des exercices à la Fermi est avant tout de former les étudiants à une réflexion pragmatique sur un problème chiffré. Il s'agit de simplifier au maximum un problème en apparence compliqué, en distinguant les paramètres essentiels des paramètres négligeables. Cet exercice impose un raisonnement structuré, argumenté et rationnel ; ce qui est très formateur, et permet d'affiner très sensiblement la compréhension d'un problème et l'esprit critique devant une donnée chiffrée.

Ces exercices sont très utiles pour comprendre le monde qui nous entoure et développer son regard critique, ils semblent essentiels dès qu'on s'intéresse à l'actualité. Les médias diffusent de nombreuses données chiffrées, parfois absurdes, parfois opaques si on ne considère pas le contexte dans lequel ces données ont un sens. C'est dans ce contexte qu'il est devenu indispensable d'être capable de comprendre ces données très précisément et être capable de les questionner. Pour cela, il est souvent nécessaire de conduire des raisonnements tels que les exercices à la Fermi le sollicitent.

Chapitre 3

Manipuler les différents ordres de grandeur

Avant tout, pour manipuler des ordres de grandeur, il faut se familiariser avec la manipulation des puissances de dix. En effet, on distinguera les ordres de grandeur en fonction de leur puissance de dix.
Par exemple, si pour un exercice de Fermi, l'étudiant trouve comme réponse 45 000 alors qu'il fallait trouver 25 000, on observera que ces deux valeurs ont le même ordre de grandeur, à savoir la même puissance de dix, puisque
$45\,000 = 4,5 \times 10^4$ et $25\,000 = 2,5 \times 10^4$.
À Sciences-Po, il conviendra de proposer un résultat ayant le même ordre de grandeur que la bonne réponse, c'est-à-dire, que si la bonne réponse vaut x, on acceptera toutes les réponses comprises entre $\dfrac{x}{10}$ et $10 \times x$.

3.1 Puissances de dix

Règles de calcul Pour tous entiers n et p, on a :

$$10^0 = 1$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$$

$$\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$$

$$(10^n)^p = 10^{n \times p}$$

Préfixes Les préfixes usuels pour les unités sont :

yocto (y) pour 10^{-24}
zepto (z) pour 10^{-21}
atto (a) pour 10^{-18}
femto (f) pour 10^{-15}
pico (n) pour 10^{-12}
nano (n) pour 10^{-9}
micro (μ) pour 10^{-6}
milli (m) pour 10^{-3}
centi (c) pour 10^{-2}
déci (d) pour 10^{-1}
déca (da) pour 10^{1}
hecto (h) pour 10^{2}
kilo (k) pour 10^{3}
méga (M) pour 10^{6}
giga (G) pour 10^{9}
téra (T) pour 10^{12}
péta (P) pour 10^{15}
exa (E) pour 10^{18}
zetta (Z) pour 10^{21}
yotta (Y) pour 10^{24}

3.2 Unités d'aire et de volume

L'unité d'aire du système international est le m^2.
Pour un préfixe quelconque donné, les puissances de 10 correspondantes sont ***doublées***.

Exemple : 1 $\mathrm{km}^2 = 10^6\ \mathrm{m}^2$.

Il existe une autre unité d'aire, ***l'are***, noté a, qui est telle que 1 a est égal à 100 $\mathrm{m}^2 = 1\ \mathrm{dam}^2$.

L'unité de volume du système international est le m^3.
Pour un préfixe quelconque donné, les puissances de 10 correspondantes sont ***triplées***.

Exemple : 1 $\mathrm{km}^3 = 10^9\ \mathrm{m}^3$.

Il existe une autre unité de volume, ***le litre***, noté l, qui est telle que 1 l est égal à 1 $\mathrm{dm}^3 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$.

Chapitre 4

Estimations, approximations et comparaisons

L'enjeu principal est donc d'estimer des grandeurs utiles pour le problème posé, avec sa propre culture générale, aussi faible soit-elle.

Comment s'y prend-on pour estimer une grandeur qu'on ne connaît pas ?

4.1 Formules de base en géométrie

Si la grandeur à évaluer est une longueur, une aire ou un volume, il peut s'avérer utile de connaître des formules simples de géométrie élémentaire :

- Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l vaut $2L + 2l$.
- Le périmètre d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$.
- L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l vaut $L \times l$.
- L'aire d'un disque de rayon r vaut πr^2.
- Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur a, de largeur b et de hauteur c vaut $a \times b \times c$.
- Le volume d'une boule de rayon r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$
- L'aire de la surface formée par les faces d'un cube de côté a vaut $6a^2$.
- L'aire d'une sphère de rayon r vaut $4\pi r^2$.

NB : On peut se demander s'il est utile de connaître toutes ces formules, notamment celles concernant les disques, sphères et boules.

— On observe que le rapport entre le périmètre d'un cercle de diamètre a et d'un carré de côté a vaut $\dfrac{4a}{\pi a} = \dfrac{4}{\pi} \simeq 1,27$.
Donc ces longueurs sont du même ordre de grandeur. Il pourra être judicieux, pour simplifier les calculs de périmètres, de confondre un cercle avec le carré dans lequel il est inscrit.

— De même, on observe que le rapport entre l'aire d'un disque de diamètre a et d'un carré de côté a vaut $\dfrac{a^2}{\pi a^2/4} = \dfrac{4}{\pi} \simeq 1,27$.
Donc ces aires sont du même ordre de grandeur. Il pourra être judicieux, pour simplifier les calculs d'aires, de confondre un disque avec le carré dans lequel il est inscrit.

— Concernant les volumes, le rapport entre le volume d'une boule de diamètre a et d'un cube de côté a vaut $\dfrac{a^3}{(4/3)\pi a^3/8} = \dfrac{6}{\pi} \simeq 1,91$.
Ces volumes sont certes du même ordre de grandeur, mais pour affiner sans effort, il suffira de considérer que le volume du cube est environ le double de celui de la sphère inscrite dans ce cube.

— Enfin, le rapport de l'aire d'un cube de côté a et de l'aire d'une sphère de côté a vaut : $\dfrac{6a^2}{4\pi a^2/4} = \dfrac{6}{\pi} \simeq 1,91$.
Ces aires sont là aussi du même ordre de grandeur, mais pour affiner sans trop d'effort, il suffira de considérer que l'aire du cube est environ égale au double de celle de la sphère inscrite dans ce cube.

Pour résumer, que ce soit pour leur périmètre ou leur aire, il n'est pas inutile de modéliser un cercle par le carré dans lequel il est inscrit.

Aussi, que ce soit pour leur aire ou leur volume, il convient de modéliser une boule (ou sphère) par le cube dans lequel elle est inscrite. Ce faisant, on obtiendra des aires/volumes deux fois supérieures à celles que l'on recherche.

4.2 Comparaison

Si la grandeur à estimer n'est pas le résultat d'une formule simple, il peut très efficace d'essayer de la comparer à une autre grandeur que vous connaissez.
Par exemple : Si on cherche à estimer l'épaisseur d'un ticket de métro, on peut supposer que c'est deux ou trois fois plus épais qu'une feuille de papier. Or, un cahier de 96 pages mesure environ 1 cm d'épaisseur, donc une page du cahier mesure environ 0,1 cm, donc le ticket de métro