Chapitre 1

Dénombrement

Principales notions : Ensembles - Cardinaux - Produits cartésiens - k-listes - Arrangements - Permutations - Combinaisons (sans répétition) - Combinaisons avec répétitions.

Principales formules : Lois de Morgan - Formule du crible (ou de Poincaré) - Principe additif - Principe multiplicatif.

1.1 Exercices types

Exercice 1

Soient $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ et A, B, C et D quatre parties de E définies par

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{4,5,6,7\}, \quad C = \{1,3,5,7\}, \quad D = \{2,3,4,5,6\}.$$

1. Calculer $\overline{A}$.
2. Calculer $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.
3. Calculer $(A \cup C) \cap (B \cup D)$.
4. Calculer $\overline{(\overline{A} \cap D)} \cap \overline{(B \cup C)}$.

Solution 1.

1. On a
$$\overline{A} = \complement_E A = \{5,6,7\}.$$
2. On a
$$A \cap B = \{1,2,3,4\} \cap \{4,5,6,7\} = \{4\}$$

et

$$C \cap D = \{1,3,5,7\} \cap \{2,3,4,5,6\} = \{3,5\}.$$

Par conséquent,

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{4\} \cup \{3,5\} = \{3,4,5\}.$$

3. On a

$$A \cup C = \{1,2,3,4\} \cup \{1,3,5,7\} = \{1,2,3,4,5,7\}$$

et

$$B \cup D = \{4,5,6,7\} \cup \{2,3,4,5,6\} = \{2,3,4,5,6,7\}.$$

Par conséquent,

$$(A \cup C) \cap (B \cup D) = \{1,2,3,4,5,7\} \cap \{2,3,4,5,6,7\} = \{2,3,4,5,7\}.$$

4. On a

$$\overline{A} = \{5,6,7\}, \qquad \overline{A} \cap D = \{5,6,7\} \cap \{2,3,4,5,6\} = \{5,6\},$$

$$\overline{\overline{A} \cap D} = \{1,2,3,4,7\},$$

$$B \cup C = \{4,5,6,7\} \cup \{1,3,5,7\} = \{1,3,4,5,6,7\}, \quad \overline{B \cup C} = \{2\}.$$

Donc

$$\overline{(\overline{A} \cap D)} \cap \overline{(B \cup C)} = \{1,2,3,4,7\} \cap \{2\} = \{2\}.$$

Remarque : pour calculer $\overline{\overline{A} \cap D}$ et $\overline{B \cup C}$, on aurait pu utiliser les lois de Morgan ; on a

$$\overline{\overline{A} \cap D} = A \cup \overline{D}, \qquad \overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}.$$

Exercice 2

Soient $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{1,4,6\}$. Calculer $\mathrm{Card}(A \cup B)$:

1. directement.
2. en utilisant la formule du crible à l'ordre 2 :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Solution 2.

1. On a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Donc
$$\text{Card}(A \cup B) = 5.$$
2. On a $\text{Card}(A) = 4$, $\text{Card}(B) = 3$ et, comme $A \cap B = \{1, 4\}$, $\text{Card}(A \cap B) = 2$. Il vient
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 4 + 3 - 2 = 5.$$

Exercice 3

Une association de consommateurs note un produit selon 3 critères :
- *Facilité d'utilisation :* bonne, moyenne, mauvaise,
- *Prix :* cher, pas cher,
- *Coût de maintenance :* cher, moyen, pas cher.

Combien y a t-il de possibilités de classement pour un produit ?

Solution 3. Il y a 3 possibilités pour la facilité d'utilisation, 2 pour le prix et 3 pour le coût de maintenance. Donc le nombre total de possibilités de classement est
$$3 \times 2 \times 3 = 18.$$

Exercice 4

Un disque compact comprenant 10 morceaux est introduit dans un lecteur disposant de la touche Random Play. Celle-ci permet d'écouter une et une seule fois chacun des 10 morceaux du disque dans un ordre aléatoire. Après appui sur cette touche, combien y a-t-il d'enchaînements distincts possibles ?

Solution 4. Il y a 10 possibilités pour le premier morceau, 9 pour le deuxième ..., et 1 pour le dixième. Donc le nombre d'enchaînements distincts possibles est
$$10 \times 9 \times \ldots \times 1 = 10! = 3628800.$$

Autre formulation : on s'intéresse au nombre de permutations de 10 éléments. Le résultat est
$$10! = 3628800.$$

Exercice 5

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Déterminer le nombre de combinaisons de 3 éléments de E.

2. Déterminer le nombre d'arrangements de 3 éléments de E.
3. Écrire méthodiquement :
   - les combinaisons de 3 éléments de E,
   - les arrangements de 3 éléments de E.

   Retrouver les résultats des questions 1- et 2-.

Solution 5.

1. Comme E est un ensemble à 4 éléments, le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est
$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$
2. Comme E est un ensemble à 4 éléments, le nombre d'arrangements de 3 éléments de E est
$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$
3. – Les combinaisons de 3 éléments de E sont $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$ et $\{a, c, d\}$. On a 4 combinaisons différentes.
   – Les arrangements de 3 éléments de E sont
$$\begin{array}{cccccc} (a,b,c), & (a,c,b), & (a,b,d), & (a,d,b), & (a,c,d), & (a,d,c), \\ (b,a,c), & (b,c,a), & (b,a,d), & (b,d,a), & (b,c,d), & (b,d,c), \\ (c,a,b), & (c,b,a), & (c,a,d), & (c,d,a), & (c,b,d), & (c,d,b), \\ (d,a,b), & (d,b,a), & (d,a,c), & (d,c,a), & (d,b,c), & (d,c,b). \end{array}$$

   On a 24 arrangements différents. On retrouve les résultats des questions 1- et 2-.

Exercice 6

Dans un jeu standard de 32 cartes, on choisit au hasard et simultanément 5 cartes. On dit alors que l'on a une main de 5 cartes.

1. Combien de mains de 5 cartes peut-on choisir ?

Combien de mains de 5 cartes peut-on choisir contenant :

2. les 4 as.
3. aucun carreau.
4. au moins un carreau.

Solution 6.

1. Une main de 5 cartes est une combinaison de 5 cartes parmi 32. Par conséquent, le nombre de mains de 5 cartes est

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!(32-5)!} = 201376.$$

2. Une main de 5 cartes contenant 4 as est constituée de tous les as et d'une autre carte prise parmi les 28 qui ne sont pas des as. Par conséquent, le nombre total de possibilités est 28.

3. Une main de 5 cartes ne contenant aucun carreau est constituée de 5 cartes prises parmi les 24 qui ne sont pas des carreaux. Par conséquent, le nombre total de possibilités est

$$\binom{24}{5} = \frac{24!}{5!(24-5)!} = 42504.$$

4. Le nombre de mains de 5 cartes contenant au moins un carreau est égal au nombre de mains de 5 cartes moins le nombre de mains de 5 cartes ne contenant aucun carreau. Les résultats des questions 1- et 3- entraînent

$$201376 - 42504 = 158872.$$

Raisonnement utilisant les cardinaux : soit A ={mains de 5 cartes parmi 32 contenant au moins un carreau}. On cherche à calculer Card(A). Comme la définition de l'ensemble A fait apparaître "au moins un", il est arrangeant de considérer son complémentaire. On a $\overline{A}$= {mains de 5 cartes parmi 32 ne contenant aucun carreau} et $A = \complement_E \overline{A}$ où E ={mains de 5 cartes parmi 32}. Par conséquent,

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\complement_E \overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A}).$$

Or, par le résultat de la question 1-, on a Card(E) = 201376. Le résultat de la question 3- entraîne Card($\overline{A}$) = 42504. Donc

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A}) = 201376 - 42504 = 158872.$$

Exercice 7

Une urne contient N boules dont N_1 blanches et $N_2 = N - N_1$ noires. On tire au hasard n boules de l'urne. On cherche à calculer le nombre de possibilités pour obtenir exactement k boules blanches. Les nombres de possibilités correspondants aux différents modes de tirage sont confectionnés dans le tableau suivant :

Tirages	avec remise	sans remise
avec ordre	$\binom{n}{k} N_1^k N_2^{n-k}$	$\binom{n}{k} A_{N_1}^k A_{N_2}^{n-k}$
sans ordre	—	$\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$

Montrer les résultats de ce tableau.

Solution 7.

Tirages avec ordre et remise : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour les positions des k boules blanches avec N_1 possibilités pour chacune d'entre elles, soit N_1^k possibilités. Les positions des $n-k$ boules noires sont ensuite imposées avec N_2 possibilités pour chacune d'entre elles, soit N_2^{n-k} possibilités. Donc le nombre total de possibilités est

$$\binom{n}{k} N_1^k N_2^{n-k}.$$

Tirages avec ordre et sans remise : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour les positions des k boules blanches. Il y a N_1 possibilités pour la première boule blanche, $N_1 - 1$ pour la deuxième $\ldots$, et $N_1 - k + 1$ pour la k-ème, soit $A_{N_1}^k$ possibilités. Les positions des $n-k$ boules noires sont ensuite imposées. Il y a N_2 possibilités pour la première boule noire, $N_2 - 1$ pour la deuxième $\ldots$, et $N_2 - n + k + 1$ pour la $n - k$-ème, soit $A_{N_2}^{n-k}$ possibilités. Donc le nombre total de possibilités est

$$\binom{n}{k} A_{N_1}^k A_{N_2}^{n-k}.$$

Tirage sans ordre et sans remise : il y a $\binom{N_1}{k}$ possibilités pour les k boules blanches, et $\binom{N_2}{n-k}$ pour les $n-k$ boules noires. Donc le nombre total de possibilités est

$$\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}.$$

Exercice 8

Combien d'anagrammes peut-on faire avec le mot "bébés" ?

Solution 8. On cherche à calculer le nombre de mots distincts de 5 lettres que l'on peut faire en permuttant les lettres du mot "bébés". On s'intéresse donc au nombre de permutations avec répétition de la collection $E = [b, \text{é}, b, \text{é}, s] = [b, b, \text{é}, \text{é}, s]$. Donc le nombre d'anagrammes du mot "bébés" est

$$\binom{5}{2,2,1} = \binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30.$$

On a adopté la notation :

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \ldots \binom{n - \sum_{i=1}^{k-1} n_i}{n_k} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(n_i!)}.$$

1.2 Exercices

Exercice 9. Soient $A = \{\text{entiers impairs}\}$ une partie de $\mathbb{N}$, $B = [1, 9[$ et $C = \{4\}$ deux parties de $\mathbb{R}$. Calculer

$$A \cap B, \qquad B \cap C, \qquad A \cap C, \qquad \overline{A}, \qquad \overline{A \cup \overline{B}}.$$

Exercice 10. Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.

Exercice 11. Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. Montrer que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Exercice 12. Soit E l'ensemble des individus d'une population. Dans celle-ci, on considère F l'ensemble des femmes et C l'ensemble des personnes (hommes et femmes) aimant le chocolat. Écrire, en fonction des ensembles précédents, l'ensemble des possibilités pour :

1. choisir une femme aimant le chocolat,
2. choisir une femme, puis un homme,
3. choisir une femme n'aimant pas le chocolat, puis un homme aimant le chocolat.

Exercice 13. Soient A et B deux ensembles tels que

$$\text{Card}(A) = 4, \qquad \text{Card}(B) = 3, \qquad \text{Card}(A \cap B) = 1.$$

Calculer $\mathrm{Card}(A \cup B)$.

Exercice 14. Soient A, B et C trois ensembles tels que

$$\mathrm{Card}(A) = 31, \quad \mathrm{Card}(B) = 24, \quad \mathrm{Card}(C) = 17, \quad \mathrm{Card}(A \cap C) = 12,$$

$$\mathrm{Card}(B \cap C) = 9, \quad \mathrm{Card}(A \cap B \cap C) = 4, \quad \mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = 38.$$

Calculer $\mathrm{Card}(A \cap B)$.

Exercice 15. Soient E un ensemble fini, et (A, B, C) une partition de E. On suppose que

$$\mathrm{Card}(E) = 400, \quad \mathrm{Card}(A) = 10, \quad \mathrm{Card}(B) = 20, \quad \mathrm{Card}(C) = 30.$$

Calculer $\mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

Exercice 16. Dans un restaurant universitaire, un menu comporte une entrée, un plat et un dessert. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice 17. Combien de mots de passe de 8 symboles peut-on créer avec 66 caractères ?

Exercice 18. Si, dans un pays, les voitures ont des plaques d'immatriculation avec 2 lettres (leur alphabet a 26 caractères) et ensuite 3 chiffres, combien de plaques possibles y a-t-il ?

Exercice 19. On dispose de 4 billes de couleurs différentes : une rouge, une verte, une bleue et une jaune. Combien y a-t-il de façons différentes de placer ces billes dans les 9 trous d'un support en bois, chacun des trous pouvant contenir au plus une bille ?

Exercice 20. On considère les nombres à 3 chiffres formés avec les 6 chiffres : 2, 3, 5, 6, 7 et 9, sans répétition.

1. Combien de ces nombres peut-on ainsi former ?
2. Combien de ces nombres sont
   (a) inférieurs à 500 ?