A . 1

VECTEURS

1. DEFINITIONS - NOTATIONS

- **Espace**

Les systèmes réels évoluent dans l'espace physique dont l'image mathématique est l'espace affine euclidien à 3 dimensions muni de la distance euclidienne.

- **Point** noté *A(x,y,z)*

Le point est l'élément de l'espace affine. *x, y, z,* sont ses coordonnées canoniques.

- **Bi-point** (ou **vecteur lié**) noté (*A*,*B*)

Un bi-point, noté (*A*,*B*), est un couple ordonné de 2 points (origine *A* et extrémité *B)*

Il a 6 composantes, les coordonnées des 2 points : x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B,

Composantes canoniques d'un bi-point : $x_B - x_A$, $y_B - y_A$, $z_B - z_A$

- **Vecteur** (vecteur libre) **associé au bi-point** (*A*,*B)* : $\overline{AB}$

C'est l'ensemble ordonné de ses 3 composantes canoniques.

On le note
$$\boxed{\overline{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}}$$

C'est un vecteur de l'espace vectoriel réel à 3 dimensions associé à l'espace affine.

- **Bi-points équipollents**

Deux bi-points (*A*,*B)* et (*C*,*D*) sont équipollents s'ils sont associés au même vecteur libre. Ils ont les mêmes composantes canoniques :

$$\overline{AB} = \overline{CD} \qquad \text{ou} \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \begin{cases} x_B - x_A & = & x_D - x_C \\ y_B - y_A & = & y_D - y_C \\ z_B - z_A & = & z_D - z_C \end{cases}$$

- Propriété

Si *(A,B)* et (*C*,*D*) sont équipollents, *(A,C)* et (*B*,*D)* sont équipollents : $\overline{AC} = \overline{BD}$

- Relation de Chasles : Si A, B, C sont 3 points $\boxed{\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}}$

Base (ou repère): $R(O,\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z}\ )$

Dans une base orthonormée directe est constituées par les 3 vecteurs unitaires $\overline{x}=(1,0,0)$ $\overline{y}=(0,1,0)$ $\overline{z}=(0,0,1)$ le vecteur $\overline{OM}$ associé à tout point M s'écrit

$$\boxed{\overline{OM}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_R = x\overline{x}+y\overline{y}+z\overline{z}}$$

- **Distance euclidienne**

La distance euclidienne de 2 points A et B est la norme du vecteur $\overline{AB}$, soit

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

2. OPERATIONS SUR LES VECTEURS

2.1 Produit scalaire

Pour 2 vecteurs $\overline{V}_1(X_1,Y_1,Z_1)$ et $\overline{V}_2(X_2,Y_2,Z_2)$ les 3 définitions sont équivalentes :

1. Le produit scalaire par $\overline{V}_1$ du vecteur_ $\overline{V}_2$ est le scalaire

$$\boxed{\overline{V}_1.\overline{V}_2 = X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}$$

2. Le produit scalaire par $\overline{V}_1$ du vecteur $\overline{V}_2$ faisant l'angle θ avec $\overline{V}_1$ est le scalaire

$$\boxed{\overline{V}_1.\overline{V}_2=V_1V_2\cos\theta}$$

3. Le produit scalaire est la forme bilinéaire symétrique unique vérifiant les conditions

$$\boxed{\overline{x}^2=\overline{y}^2=\overline{z}^2=1} \qquad \boxed{\overline{y}.\overline{z}=\overline{z}.\overline{x}=\overline{x}.\overline{y}=0}$$

Symétrie : $\overline{V}_1\overline{V}_2=\overline{V}_2\overline{V}_1$

2.2 Produit vectoriel

Pour 2 vecteurs $\overline{V}_1(X_1,Y_1,Z_1)$ et $\overline{V}_2(X_2,Y_2,Z_2)$ les 3 définitions sont équivalentes :

1. Le produit vectoriel par $\overline{V}_1$ du vecteur $\overline{V}_2$ est le vecteur

$$\overline{W}=\overline{V}_1\wedge\overline{V}_2=(y_1z_2-z_1y_2)\overline{x}+(z_1x_2-x_1z_2)\overline{y}+(x_1y_2-y_1x_2)\overline{z}$$

2. Le produit vectoriel par $\overline{V}_1$ du vecteur $\overline{V}_2$ est le vecteur $\overline{W}$

✓ orthogonal à $\overline{V}_1$ et à $\overline{V}_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \checkmark \quad \text{tel que } \overline{V}_1,\ \overline{V}_2,\ \overline{W} \text{ soit direct} \\ \checkmark \quad \text{de norme } |W| = |V_1 V_2 \sin\theta| \end{array}}$$

3. Le produit vectoriel est la loi de composition interne unique bilinéaire et antisymétrique vérifiant

$$\boxed{\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{z} \quad \overline{y} \wedge \overline{z} = \overline{x} \quad \overline{z} \wedge \overline{x} = \overline{y}}$$

Antisymétrie : $\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2 = -\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_1$

2.3 Produit mixte

Le produit mixte des 3 vecteurs $\overline{V}_1, \overline{V}_2,\ \overline{V}_3$ pris dans cet ordre est le scalaire

$$\boxed{\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right) = \overline{V}_1.\left(\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3\right)}$$

Il est inchangé par permutation circulaire et change de signe pour une autre permutation. Il est égal au volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs. Il vaut :

$$\boxed{\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}}$$

2.4 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel des 3 vecteurs $\overline{V}_1, \overline{V}_2,\ \overline{V}_3$ est le vecteur

$$\boxed{\overline{W} = \overline{V}_1 \wedge \left(\overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3\right)}$$

Dans un repère orthonormé :

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} Y_2 Z_3 - Z_2 Y_3 \\ Z_2 X_3 - X_2 Z_3 \\ X_2 Y_3 - Y_2 X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2\left(X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3\right) - X_3\left(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2\right) \\ Y_2\left(X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3\right) - Y_3\left(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2\right) \\ Z_2\left(X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3\right) - Z_3\left(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2\right) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overline{W} = \left(\overline{V}_1.\overline{V}_3\right)\overline{V}_2 - \left(\overline{V}_1.\overline{V}_2\right).\overline{V}_3}$$

2.5 Division vectorielle

Diviser $\overline{A}$ par $\overline{B}$ c'est chercher (s'il existe) le vecteur $\overline{X}$ tel que $\boxed{\overline{A} = \overline{X} \wedge \overline{B}}$

Si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ne sont pas orthogonaux, il n'y a pas de solution.

Si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont orthogonaux, il y a une infinité de solutions :

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\overline{B} \wedge \overline{A}}{\overline{B}^2} + \lambda \overline{B}} \quad \text{avec } \lambda \text{ quelconque}$$

A . 2

TENSEURS

1. DEFINITIONS - NOTATIONS

Un tenseur est un opérateur linéaire

1.1 Tenseur d'ordre 1

Le tenseur d'ordre est l'opérateur linéaire qui, à un vecteur $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ fait correspondre un scalaire Y parfaitement déterminé.

$$\boxed{Y = \overline{A}.\overline{X} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}$$

C'est le vecteur $\overline{A}$ (a_1, a_2, a_3)

On note $\boxed{Y = \overline{A}.\overline{X}}$

La base utilisée n'intervient que pour permettre le calcul effectif de Y, sans avoir aucune influence sur le résultat final.

1.2 Tenseur d'ordre 2

Le tenseur d'ordre 2 est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ fait correspondre un vecteur $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Dans une base orthonormée
$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

que l'on écrit encore $y_i = \sum_j \left(a_{ij} x_j\right)$ ou $y_i = a_{ij} x_j$

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\overline{Y} = \overline{\overline{A}}.\overline{X}}$$

en désignant par $\overline{\overline{A}}$ l'opérateur linéaire considéré, qui à $\overline{X}$ fait correspondre $\overline{Y}$.

On le représente par la matrice $\boxed{\overline{\overline{A}} = \{a_{ij}\}}$

Forme bilinéaire

C'est le produit scalaire $\overline{X}'.\overline{Y}$ c'est à dire

$$\overline{X}'.\overline{\overline{A}}.\overline{X} = \sum_{i,j}\left(a_{ij}x_i x'_j\right)$$

Forme quadratique

C'est le produit scalaire $\overline{X}.\overline{Y}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\overline{X}.\overline{\overline{A}}.\overline{X} = \sum_{i,j}\left(a_{ij}x_i x_j\right)}$$

$$\boxed{\overline{X}.\overline{\overline{A}}.\overline{X} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2}$$

1.3 Tenseur d'ordre 3

Un tenseur d'ordre 3 est *l'opérateur linéaire qui à tout vecteur* $\overline{X}$ *fait correspondre un tenseur d'ordre 2 :*

$$\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{\overline{A}}}.\overline{X}$$

Pour définir les 9 composantes de $\overline{\overline{Y}}$ il faut des relations $y_{ij} = \sum_k\left(a_{ijk}x_k\right)$ ou $y_{ij} = a_{ijk}x_k$

L'opérateur linéaire $\overline{\overline{\overline{A}}}$ a donc $3^3 = 27$ composantes a_{ijk}

1.4 Tenseur d'ordre *n*

Un tenseur d'ordre n est un opérateur linéaire qui à tout vecteur $\overline{X}$ *associe un tenseur d'ordre n-1.*

On le représente avec n barres au-dessus de la lettre qui le désigne ou par A^n.
Il a 3^n composantes.

2. OPERATIONS SUR LES TENSEURS

2.1. Somme et multiplication par un scalaire

- **Somme de deux tenseurs d'ordre *n***

C'est le tenseur du même ordre dont chaque composante est la somme des composantes correspondantes.

- **Multiplication par un scalaire** λ.

C'est le tenseur $\lambda.A^n$ *du même ordre dont chaque composante est le produit par* λ *de la composante correspondante de* A^n .

2.2. Produits de 2 tenseurs

a) Produit tensoriel

Le produit du tenseur A^n par le tenseur B^q est le tenseur P^{n+q} d'ordre $n+q$ de composantes

$$\boxed{p_{i_1 i_2 \dots i_{n+q}} = a_{i_1 \dots i_n} . b_{i_1 \dots i_q}}$$

On note $$\boxed{P^{n+q} = A^n \times B^q}$$

L'opération produit tensoriel n'est pas commutative.

- ***Exemple : Produit tensoriel de 2 vecteurs*** $\overline{U}(u_1, u_2, u_3)$ et $\overline{V}(v_1, v_2, v_3)$

C'est le tenseur d'ordre 2 $\quad \overline{\overline{P}} = \overline{U} \times \overline{V} \quad$ avec $\quad p_{ij} = u_i v_j$

alors que $\quad \overline{\overline{P}}' = \overline{V} \times \overline{U} \quad$ avec $\quad p'_{ij} = v_i u_j$

c'est-à-dire

$$\overline{\overline{P}} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{P}}' = \begin{bmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \end{bmatrix}$$

Les 2 matrices sont transposées l'une de l'autre.

b) Produit contracté, ou produit scalaire

Le produit contracté, ou produit scalaire des tenseurs A^n et B^q est le tenseur C^{n+q-2} d'ordre $n + q$ -2 de composante

$$\boxed{c_{i_1 \dots i_{n+q-2}} = \sum_k \left(a_{i_1 \dots i_{n-1} k} . b_{k i_2 \dots i_q} \right)}$$

Chaque composante est la somme de 3 termes obtenus en donnant au dernier indice de a et au premier indice de b la même valeur k prise successivement égale à 1, 2 et 3.

On note : $\boxed{C^{n+q-2} = A^n . B^q}$

On dit qu'on a effectué la contraction sur le dernier indice de A^n et sur le premier indice de B^q.

On peut convenir d'effectuer la contraction sur d'autres indices, par exemple les derniers indices de A^n et de B^q.

Exemples

- ***Produit contracté de 2 vecteurs*** $\overline{A}(a_1, a_2, a_3)$ et $\overline{B}(b_1, b_2, b_3)$

  C'est un tenseur d'ordre zéro, c'est-à-dire un scalaire :

$$\boxed{C = \overline{A}.\overline{B} = \sum_k (a_k b_k)}$$

  C'est le produit scalaire habituel.

- ***Produit contracté d'un tenseur d'ordre 2*** $\overline{\overline{A}}(a_{ij})$ ***et d'un vecteur*** $\overline{B}(b_k)$

  C'est un tenseur d'ordre un, c'est-à-dire un vecteur :

$$\overline{C} = \overline{\overline{A}}.\overline{B}$$

$$\boxed{c_i = \sum_k (a_{ik} b_k)}$$

(c'est la notation habituelle de l'application linéaire qui, au vecteur $\overline{B}$ fait correspondre le vecteur $\overline{C}$).

- ***Produit contracté de 2 tenseurs d'ordre deux*** $\overline{\overline{A}}(a_{ij})$ et $\overline{\overline{B}}(b_{mn})$

  C'est le tenseur d'ordre deux

$$\boxed{\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}}}$$

$$\boxed{c_{in} = \sum_k (a_{ik} b_{kn})}$$

La matrice associée à $\overline{\overline{C}}$ est obtenue en effectuant le produit ligne à colonne des matrices associées à $\overline{\overline{A}}$ et à $\overline{\overline{B}}$.

3. TENSEURS D'ORDRE DEUX

3.1 Tenseurs particuliers

a) Tenseur unité

C'est le tenseur $\overline{\overline{u}}$ tel que $\overline{\overline{u}}.\overline{V} = \overline{V}$

$$\boxed{\overline{\overline{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

b) Tenseur droit

C'est un tenseur égal à son transposé $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{D}}^t$

$$d_{ij} = d_{ji}$$

Un tenseur droit n'a que 6 composantes distinctes.

Pour un tel tenseur il existe toujours au moins une base orthonormale dite *base principale* telle que la matrice associée ait la forme diagonale.

On la définit en cherchant les vecteurs propres caractérisés par le fait qu'ils ont même direction que leurs homologues dans l'application définie par $\overline{\overline{D}}$, soit $\overline{\overline{D}}.\overline{V} = \lambda \overline{V}$.

c) Tenseur gauche, ou tenseur antisymétrique

C'est un tenseur opposé à son transposé $\overline{\overline{G}} = -\overline{\overline{G}}^t$

Ce qui implique que $g_{ii} = 0$

Un tenseur gauche n'a que 3 composantes distinctes.

On lui associe le vecteur $\overline{\Omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ appelé ***vecteur adjoint*** au tenseur $\overline{\overline{G}}$.

$$g_{32} = -g_{23} = \omega_1 \quad g_{13} = -g_{31} = \omega_2 \quad g_{21} = -g_{12} = \omega_3$$

L'opérateur $\overline{\overline{G}}$ définit pour tout vecteur $\overline{U}(u_1, u_2, u_3)$ le vecteur $\overline{V} = \overline{\overline{G}}.\overline{U}$

$$\overline{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_3 u_2 + \omega_2 u_3 \\ -\omega_1 u_3 + \omega_3 u_1 \\ -\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\overline{V} = \overline{\overline{G}}.\overline{U} = \overline{\Omega} \wedge \overline{U}}$$