CHAPITRE I

ETUDE DES SYSTEMES MECANIQUES

1 - MODELISATION

1.1 - Systèmes mécaniques

Un système mécanique est un ensemble de pièces dont les formes et le mode d’assemblage ont été choisis pour assurer une fonction.

Les pièces sont réalisées dans une matière à l’état physique dit état solide. Mais ce ne sont que des pseudo-solides qui se déforment toujours, de façon plus ou moins importante sous l’action des forces extérieures qui leur sont appliquées.

Dans certains cas, ces déformations peuvent être la caractéristique essentielle et souhaitée de la pièce et on veut alors que ses déformations soient importantes. C’est le cas des ressorts qui seront étudiés dans la dernière partie de l’ouvrage. Ils sont absents dans les systèmes mécaniques envisagés dans ce premier chapitre.

On s’intéresse ici aux systèmes constitués de pièces dont les déformations sont les plus petites possibles car elles y constituent une gêne. Elles sont cependant inévitables mais on les néglige dans la modélisation proposée.

On n’étudie donc dans cette modélisation que des systèmes mécaniques dont les pièces seraient des solides au sens strict du terme.

Dans ces systèmes, les actions entre les solides qu’elles constituent sont des actions de contact. Ces dernières ont été étudiées dans l’ouvrage de première année. Dans la modélisation proposée ici, on idéalise ces actions de contact en ne retenant que leur composante normale, c'est-à-dire que l’on néglige les frottements pourtant eux aussi inévitables : les liaisons sont donc des liaisons parfaites. On les suppose de plus bilatérales. Dans ces systèmes mécaniques ainsi idéalisés, on a donc par hypothèses ***uniquement des solides et des liaisons parfaites bilatérales***.

1.2 - Les liaisons

Les liaisons entre solides constituant un mécanisme ou entre ces solides et l’extérieur (bâti) étant par hypothèse parfaites, à chaque élément de surface de contact ne correspond qu’une interaction élémentaire normale à la surface. Elle ne s’oppose donc qu’à la seule possibilité déplacement relatif dans sa direction.

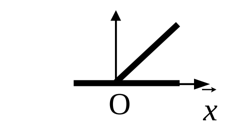
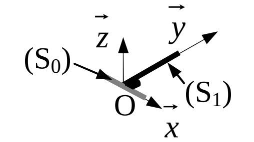
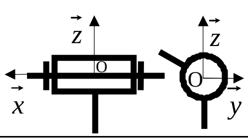
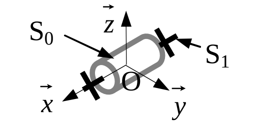
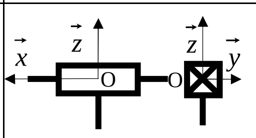
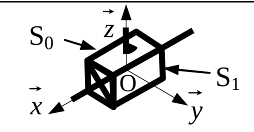
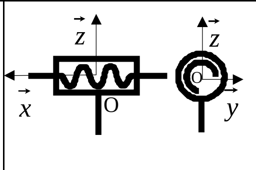
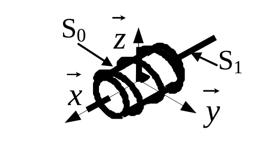
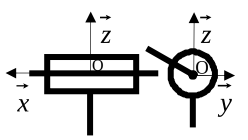
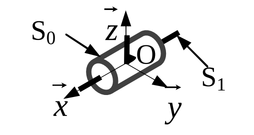
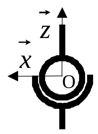
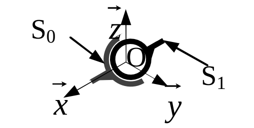
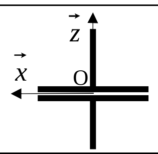
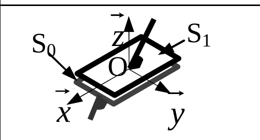
En sommant l’ensemble de ces interactions entre deux solides S_0 et S_1, on obtient le ***torseur statique de la liaison*** $\left[S_0 \to S_1 \right]$. Chacune de ses composantes non nulle implique donc une suppression de possibilité de déplacement relatif dans sa direction. On dit qu’elle supprime le degré de liberté correspondant.

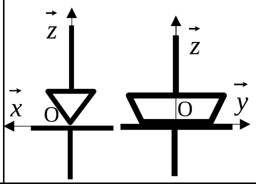
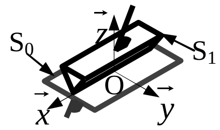
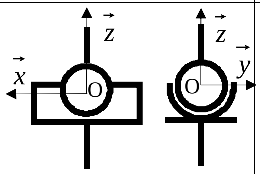
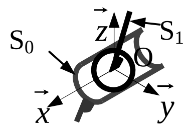
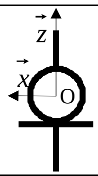
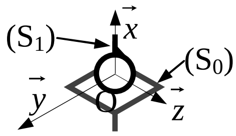
D'autre part, en admettant que dans un intervalle de temps Δt très court, les vitesses ne varient que très peu, si on néglige ces variations on obtient pour les petits déplacements lors de cet intervalle de temps les mêmes relations que pour les vitesses. On admet donc pour les petits déplacements l'existence d'un ***torseur distributeur des petits déplacements*** $[V(1/0)]$ ou ***torseur cinématique de la liaison***. Ses composantes sont les degrés de liberté correspondant à la liaison.

A chaque degré de liberté subsistant correspond donc une composante nulle du torseur statique et une composante correspondante non nulle du torseur cinématique. A chaque degré de liberté supprimé correspond réciproquement une composante non nulle du torseur statique et une composante nulle du torseur cinématique.

Attention car les composantes correspondantes des deux torseurs sont celles de la résultante pour l'un et du moment pour l'autre.

On peut ainsi étudier les différentes liaisons indifféremment par une approche statique ou cinématique. Ces deux approches ont été étudiées en première année dans les chapitres V et IX du tome I. On rappelle ici les principales liaisons définies par la norme ISO 3952 ou NF EN 2395.

Nom de la liaison	Représentation dans le plan	Perspective	Torseur statique $[S_0 \to S_1]$	Torseur cinématique $[V(1/0)]$
Encastrement			${}_O\begin{Bmatrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot			${}_O\begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Glissière			${}_O\begin{Bmatrix} 0 & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & V_{Ox} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Glissière hélicoïdale			${}_O\begin{Bmatrix} X_O & p \cdot X_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} \Omega_x & p.\Omega_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant			${}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_{Ox} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Rotule			${}_O\begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}$
Appui plan			${}_O\begin{Bmatrix} 0 & L_O \\ 0 & M_O \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & V_{Ox} \\ 0 & V_{Oy} \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}$

Linéaire rectiligne de normale			$_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_O \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}$	$_O\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_{Ox} \\ 0 & V_{Oy} \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire			$_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}$	$_O\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_{Ox} \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}$
Ponctuelle			$_O\begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$_O\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & V_{Oy} \\ \Omega_z & V_{Oz} \end{Bmatrix}$

Les composantes X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i **non nulles et indépendantes** de la liaison (L_i) sont les inconnues statiques de la liaison (ou inconnues de liaison) et leur nombre est noté I_{si}. Par exemple, pour une liaison pivot $I_{si} = 5$.

Les composantes Ω_{xi}, Ω_{yi}, Ω_{zi}, $V_{Ox\,i}$, $V_{Oy\,i}$, $V_{Oz\,i}$ **non nulles et indépendantes** de la liaison (L_i) sont les inconnues cinématiques de la liaison et leur nombre est noté I_{ci}.

Il existe la relation suivante entre ces deux nombres :

$$\boxed{I_{c\,i} + I_{S\,i} = 6}$$

1.3 - Graphe des liaisons

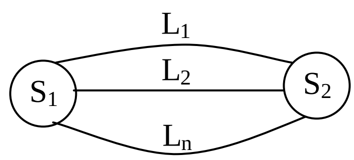
Le graphe des liaisons est une représentation du mécanisme fondée sur la description des solides et des liaisons entre ces différents solides :

- A chaque solide, on affecte un sommet du graphe représenté par un cercle dans lequel on inscrit le nom ou le numéro correspondant au solide. On note *N*, le nombre de sommets ou le nombre de solides.
- On affecte à chaque liaison identifiée un arc entre deux sommets. On note *L* le nombre de liaisons ou d'arcs.

1.4 - Liaisons équivalentes

a) Liaisons en parallèle

On dit que n liaisons sont disposées en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 si chaque liaison relie directement les deux solides. Le graphe des liaisons prend alors l'allure ci-contre :



- **Recherche de la liaison équivalente par une étude cinématique :**

La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons en parallèle entre deux solides est la liaison théorique qui autorise le même mouvement relatif entre les deux solides. Elle doit être compatible avec chacune des liaisons en parallèle.

Considérons n liaisons simples L_1, L_2,...L_i,...L_n situées en parallèles entre deux solides S_1 et S_2.

On note $[V_i(S_2/S_1)]$ le torseur distributeur des vitesses de S_2 par rapport à S_1 donné par ses éléments de réduction ${}_{O_i}\left\{\overrightarrow{\Omega_i} \quad \overrightarrow{v_i(S_2/S_1)}\right\}$ au point O_i caractéristique de la liaison L_i.

On note de la même façon $[V(S_2/S_1)]$ le torseur distributeur des vitesses de S_2 par rapport à S_1 caractérisant la liaison équivalente L_{21}.

Pour que la liaison équivalente soit compatible avec chacune des liaisons placées en parallèle, il faut nécessairement que :

$$\boxed{[V(S_2/S_1)] = [V_i(S_2/S_1)]\ \forall i}$$

- **Recherche de la liaison équivalente par une étude statique :**

On note $\left[S_2 \xrightarrow{i} S_1\right]$ le torseur associé aux actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 par l'intermédiaire de la liaison L_i. On note $[S_2 \to S_1]$ le torseur associé aux actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 par l'intermédiaire de la liaison équivalente. On suppose qu'en plus des actions mécaniques dues à S_1, le solide S_2 est soumis à une action mécanique représentée par un torseur $[F]$.

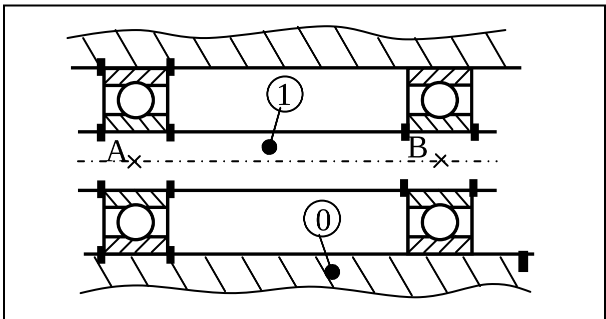
L'équilibre de S_2 se traduit par $\sum_i \left[S_2 \xrightarrow{i} S_1\right] + [F] = [0]$ ou en utilisant la liaison équivalente : $[S_2 \to S_1] + [F] = [0]$.

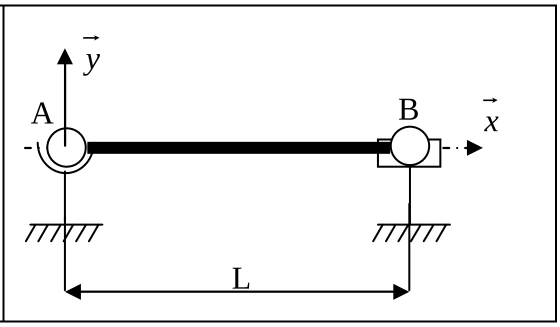
En comparant les deux équations précédentes, on obtient nécessairement :

$$\boxed{[S_2 \to S_1] = \sum_i \left[S_2 \xrightarrow{i} S_1\right]}$$

L'action mécanique exercée par la liaison équivalente à un ensemble de liaisons en parallèle est la somme des actions mécaniques exercées par chacune des liaisons.

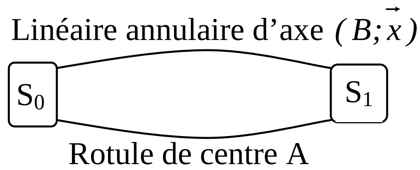
- **Exemple : Guidage en rotation d'un arbre par deux paliers**





On considère le guidage en rotation d’un arbre par deux roulements à billes. Compte tenu des arrêts axiaux, et du jeu dans les roulements, on modélise le roulement en A par une liaison rotule et le roulement en B par une liaison linéaire annulaire.

On a le graphe des liaisons suivant :



Le torseur des actions mécaniques transmissibles entre S_1 et S_0 s’écrit au centre A de la liaison rotule: $\left[S_1 \xrightarrow{1} S_0\right] = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$.

Le torseur des actions mécaniques transmissibles entre S_1 et S_0 s’écrit au centre B de la liaison linéaire annulaire : $\left[S_1 \xrightarrow{2} S_0\right] = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}$. On écrit le deuxième torseur en A en prenant $\overrightarrow{AB} = L\,\vec{x}$: $\left[S_1 \xrightarrow{2} S_0\right] = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & -LZ_B \\ Z_B & LY_B \end{Bmatrix}$

Le torseur des efforts transmissibles de la liaison équivalente est la somme des deux torseurs précédents :

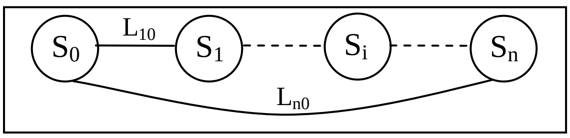
$$\left[S_1 \rightarrow S_0\right] = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_A + Y_B & aZ_A \\ Z_A + Z_B & -aY_A \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

On reconnaît le torseur des efforts transmissibles par une liaison pivot d’axe $(B,\vec{x})$.

b) Liaisons en série

On dit que n liaisons sont en série ou réalisent une chaîne ouverte entre deux solides S_0 et S_n si elles sont disposées l’une à la suite de l’autre par l’intermédiaire de $(n-1)$ solides intermédiaires.

Le graphe des liaisons se présente alors selon la figure ci-dessous :



- **Recherche de la liaison équivalente par une étude cinématique :**

La liaison équivalente à l’ensemble des liaisons situées en série entre deux solides est la liaison théorique qui autorise le même mouvement relatif entre les deux solides. Elle permet le mouvement de chacune des liaisons.

Le torseur cinématique de la liaison équivalente représente le mouvement du solide S_n par rapport au solide S_0. Il s'obtient donc en écrivant la relation de composition des torseurs cinématique entre les différents solides.

$$[V(S_n/S_0)] = [V(S_n/S_{n-1})] + \ldots + [V(S_i/S_{i-1})] + \ldots + [V(S_1/S_0)]$$

$$\boxed{V(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \left([V(S_i/S_{i-1})]\right)}$$

Utiliser des liaisons en série permet de décupler le nombre de degrés de liberté et de dissocier les mouvements.

- **Recherche de la liaison équivalente par une étude statique :**

Le torseur statique de la liaison L_i noté $[S_{i-1} \to S_i]$ est associé ici aux actions mécaniques exercées par S_{i-1} sur S_i. Le torseur associé aux actions mécanique de la liaison équivalente est le torseur noté $[S_0 \to S_n]$.

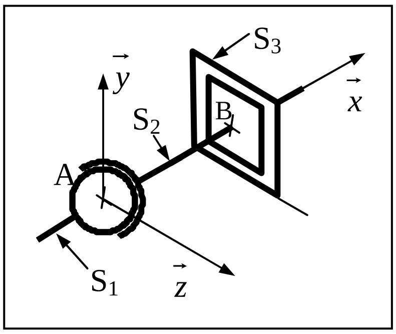
On suppose qu'aucune action extérieure ne s'exerce sur les solides intermédiaires. L'équilibre du solide intermédiaire S_i se traduit par : $[S_{i-1} \to S_i] - [S_i \to S_{i+1}] = [0]$

Par conséquent, les actions mécaniques transmises par les différentes liaisons L_i sont équivalentes. Par suite, le torseur associé aux actions mécaniques transmises par la liaison équivalente vérifie :

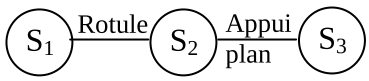
$$\boxed{[S_0 \to S_n] = [S_{i-1} \to S_i] \forall i}$$

Lorsque des liaisons sont associées en série, les actions mécaniques transmises par la liaison équivalente sont identiques aux actions mécaniques transmises par chaque liaison intermédiaire.

- **Exemple : Association en série d'un appui plan et d'une rotule**



Le graphe des liaisons est :



La composition des torseurs cinématiques permet d'écrire que : $[V(3/1)] = [V(3/2)] + [V(2/1)]$

On a : $[V(2/1)] = {}_A\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

et $[V(3/2)] = {}_B\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & V_{B_y} \\ 0 & V_{B_z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_A\begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & V_{B_y} \\ 0 & V_{B_z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ car $\overrightarrow{V(A \in 3/2)} = \overrightarrow{V(B \in 3/2)}$

Soit : $\left[V(3/1)\right] = \begin{Bmatrix} \Omega_x(3/2)+\Omega_x(2/1) & 0 \\ \Omega_y(2/1) & V_{B_y} \\ \Omega_z(2/1) & V_{B_z} \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & V_{B_y} \\ \Omega_z & V_{B_z} \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

On reconnaît le torseur cinématique d'une liaison ponctuelle.

1.5 - Cas de la modélisation plane

Par nature, un système mécanique n'est que très rarement plan. Cependant, dans certains cas particuliers, il est possible de simplifier le modèle spatial pour pouvoir en tirer un modèle plan.

Suivant le type d'étude que l'on souhaite réaliser, les hypothèses permettant d'étudier un système mécanique dans le plan sont définies ci-dessous :

a) Condition de réduction en cinématique

Pour que l'étude cinématique puisse se réduire à un problème plan, il faut que tous les torseurs cinématiques de tous les solides, pour tous les mouvements relatifs, soient des glisseurs de résultantes parallèles (vecteurs rotation parallèles).

b) Condition de réduction en statique

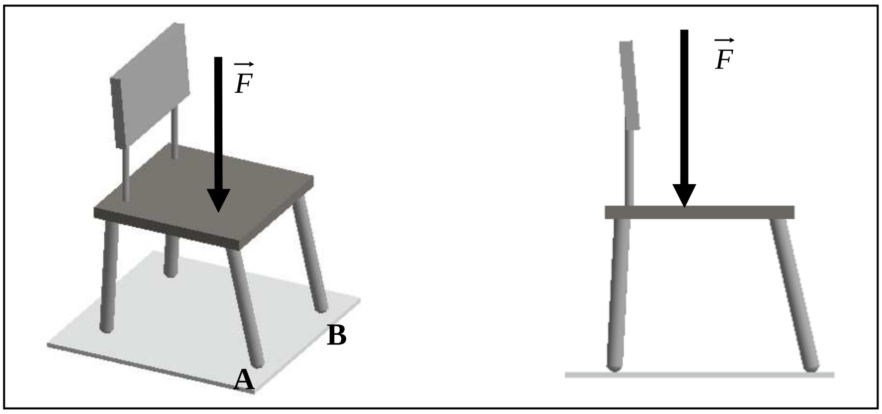
Pour que l'étude statique puisse se réduire à un problème plan, les liaisons mécaniques et les efforts extérieurs doivent posséder un même plan de symétrie.

c) Intérêt de la modélisation plane

Si le mécanisme étudié remplit les conditions évoquées ci dessus, il peut être intéressant de faire une modélisation plane. En effet, dans ce cas, le nombre de paramètres géométriques (position) est réduit à 3 au lieu de 6 dans les problèmes tridimensionnels. Il en résulte une simplification de l'étude.

De plus, une symétrie permet de réduire le nombre des inconnues ce qui peut dans certains cas conduire à un système isostatique dans le plan qu'il était hyperstatique dans l'espace (voir le paragraphe 4 pour la notion d'isostatisme ou d'hyperstatisme).

- **Exemple : étude statique d'une chaise**



Une chaise est un système mécanique hyperstatique puisque la liaison entre le sol et les 4 pieds de la chaise a un appui ponctuel redondant. Il est donc difficile de connaître la répartition exacte des efforts sur les 4 pieds.

Si les efforts exercés forment un glisseur de résultante dans le plan de symétrie situé entre les points A et B, on peut modéliser cette chaise dans le plan. Dans ce cas, le mécanisme devient isostatique et il est donc possible d'en faire une étude statique.

2 - SCHEMAS

2.1 - Nature – différents cas

Le schéma est une représentation graphique simplifiée d'un système ne comprenant que ce qui permet de traduire clairement les seuls points retenus lors de la modélisation.

Il peut être utile dans deux cas:

- Si le mécanisme existe, il s'agit de simplifier son dessin d'ensemble pour en comprendre plus simplement son fonctionnement, les mouvements, les efforts transmis….Suivant ce que l'on souhaite étudier, on pourra alors obtenir différents schémas d'un même système.

- Si le mécanisme n'existe pas, on se sert d'un ou plusieurs schémas pour traduire un (ou plusieurs) besoin(s) exprimé(s) dans un cahier des charges. La compilation de ces différents schémas doit permettre d'obtenir le dessin d'ensemble du système répondant au(x) besoin(s).

Dans cet ouvrage, on va s'intéresser uniquement au premier cas. Suivant l'étude à mener, on peut être conduit à construire plusieurs types de schémas. Les trois principaux que l'on va traiter sont les suivants :

- Dans le cas de l'étude des mouvements des pièces d'un mécanisme, on utilise le *schéma cinématique minimal*. Ce type de schéma est une représentation graphique du mécanisme utilisant les symboles normalisés définis précédemment et dans lequel on a recherché toutes les liaisons équivalentes possibles.

Ce dernier est bien adapté pour une étude géométrique et cinématique du mécanisme (loi d'entrée-sortie, position des solides dans l'espace, vitesse et accélération des points des solides….). Ce schéma peut se construire dans le plan ou en perspective.

- Si on s'intéresse à la transmission des efforts à l'intérieur du système mécanique, on préfère utiliser un *schéma technologique* (ou d'architecture) qui respecte plus fidèlement la réalité des liaisons. Ce type de schéma sera utilisé dans une étude statique ou dynamique du mécanisme étudié. Il peut se tracer dans le plan ou en perspective.

- Le *schéma de mouvement* qui est la simplification d'un schéma cinématique minimal puisque les seuls degrés de liberté autorisés sont dans le plan.

2.2 - Tracés des schémas

a) Recherche des pièces cinématiquement liées

On appelle groupe cinématiquement lié un ensemble de pièces d'un mécanisme liées par encastrement. Dans la modélisation d'un mécanisme, cet ensemble constitue un seul et même solide auquel on affecte le nom et le numéro de la pièce la plus représentative de cet ensemble. Une petite nuance peut intervenir à ce niveau si l'on souhaite tracer un schéma technologique. Comme l'on s'intéresse dans ce modèle à l'aspect « *efforts* » intervenant dans le mécanisme, la recherche des pièces cinématiquement liées ne sera pas systématique dans la mesure où il peut être intéressant de connaître les efforts dans une liaison encastrement. Si tel est le cas, on considèrera alors deux groupes différents même s'ils sont encastrés.

b) Recherche des liaisons entre solides

Pour plus de détails, on peut se référer au paragraphe 1-2 de ce chapitre ainsi qu'aux chapitres V et IX du tome I.

c) Graphe des liaisons

Quelque soit le niveau de représentation choisi, il est souhaitable de tracer le graphe des liaisons. Ce graphe va permettre de repérer d'éventuelles liaisons équivalentes et il va faciliter le calcul du degré d'hyperstaticité.

d) Recherche des liaisons équivalentes

Cette étape reprise dans le paragraphe 1-3 est nécessaire uniquement dans le cas du tracé du schéma cinématique minimal ou pour le schéma de mouvement dans le plan. Dans le cas d'un schéma technologique, il est important de ne pas rechercher les liaisons équivalentes et donc de bien mettre en évidence toutes les liaisons entre les différents groupes de solides afin de pouvoir identifier le cheminement de la transmission des efforts.

e) Réduction du graphe des liaisons

Comme pour le paragraphe précédent, cette étape est à mener uniquement pour le schéma cinématique minimal et le schéma de mouvement plan. En remplaçant dans le graphe des liaisons d'un mécanisme les liaisons en parallèle et les liaisons en série par leur liaison équivalente et ceci autant de fois que cela est nécessaire, on obtient le ***graphe minimal des liaisons.***

f) Tracé du schéma

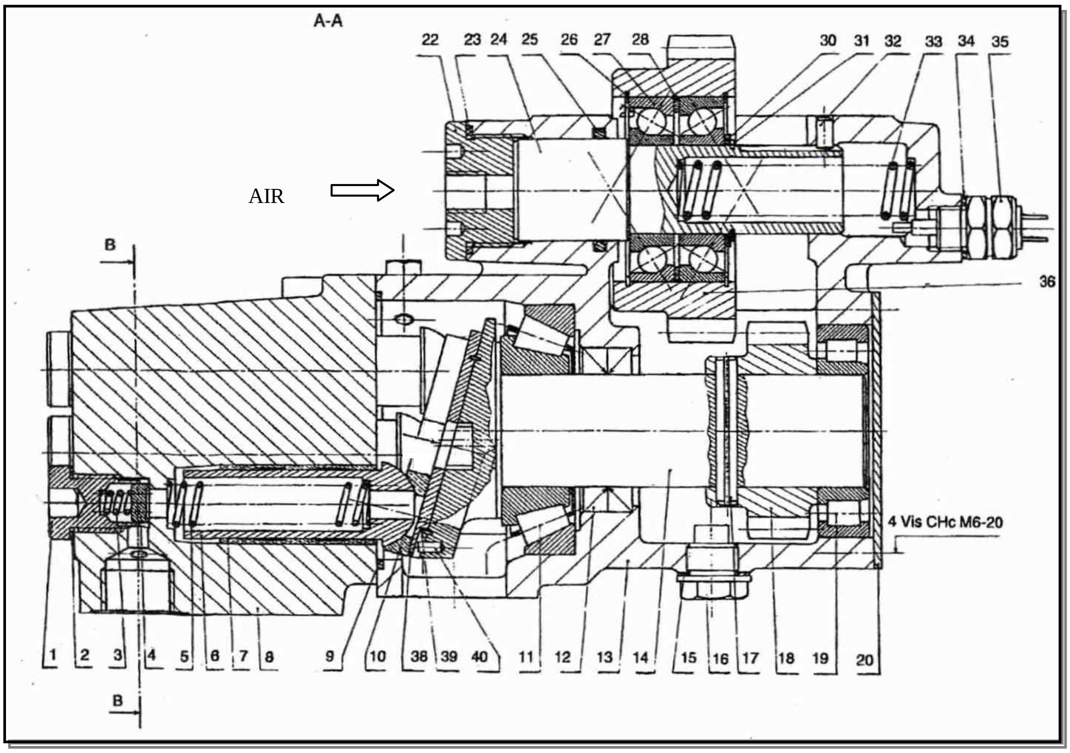
Le schéma d'un mécanisme est une représentation géométrique plane ou spatiale de son graphe des liaisons.

Pour construire ce schéma, on dessine les symboles normalisés des liaisons en respectant les caractéristiques géométriques relatives des différentes liaisons (parallélisme, orthogonalité, coaxialité…).

Les solides sont représentés par des traits continus, sans échelle et sans épaisseur qui relient les symboles normalisés des liaisons.

2.3 - Exemple

Soit le plan en coupe d'une pompe à pistons axiaux utilisée sur les boîtes de vitesse de camions. On ne s'intéresse pas à la partie concernant le refoulement du liquide et on prend en compte un seul piston.

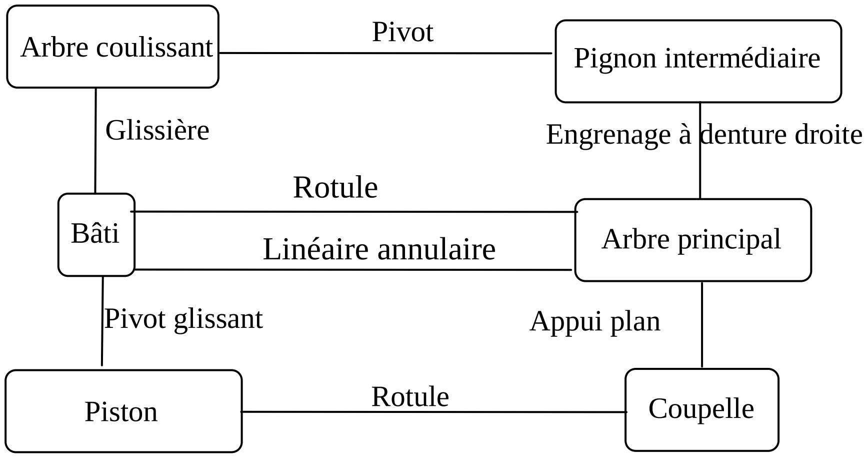


L'admission se fait par une glace de distribution plane **38** comportant une lumière semi-circulaire permettant le passage du fluide à travers la coupelle **10** et le piston **6**. Le refoulement se fait par un clapet **4**.

a) Définition des solides

Nom	Repère
Bâti (0)	1+2+5+7+8+9+12+13+15+16+17+20+22+23+25+26+28 +30+32+33+34+35
Arbre coulissant (24)	24+31
Pignon intermédiaire (36)	36
Arbre principal (14)	14+18
Coupelle (10)	10
Piston (6)	6

b) Graphe des liaisons

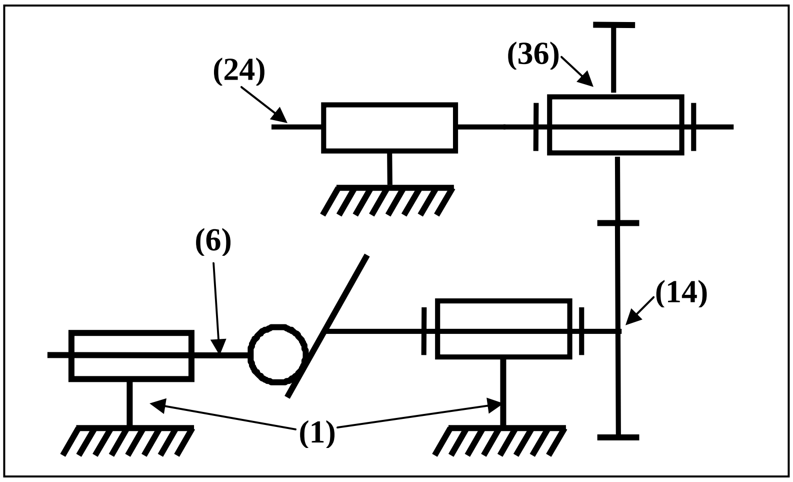


c) Recherche des liaisons équivalentes

On remarque que la liaison en série formée de l'arbre principal, de la coupelle et du piston est équivalente à une liaison ponctuelle.

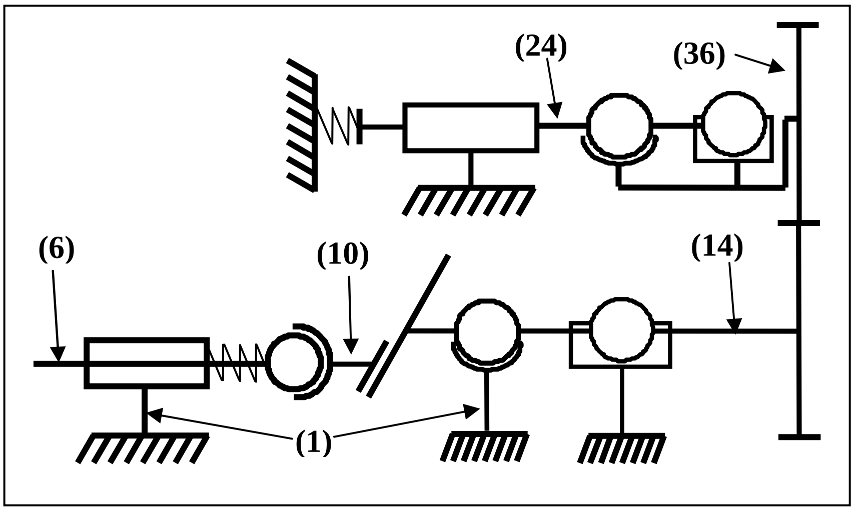
La liaison parallèle entre le bâti et l'arbre principal est équivalente à une liaison pivot.

d) Tracé du schéma cinématique minimal dans le plan



e) Tracé du schéma technologique

Le schéma technologique doit permettre de mener à bien des calculs de statique ou de dynamique dans le but par exemple de déterminer les efforts dans les différents roulements, de calculer la déformation des arbres, d'appréhender la pression de matage entre le plateau incliné et les coupelles. De ce fait, la finesse de la schématisation à réaliser dépendra de ce que l'on veut calculer. Le schéma technologique (hors refoulement) est donc :

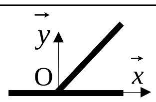
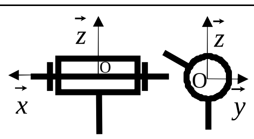
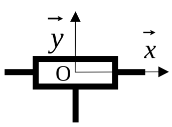
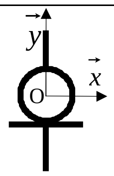


Pour des questions de lisibilité, on a représenté le ressort de rappel de l'arbre coulissant à gauche de la figure

2.4 - Compléments sur la modélisation plane et le schéma de mouvement

a) Liaisons planes

Dans une modélisation plane, on considère uniquement 3 degrés de libertés. De ce fait, en enlevant les degrés de libertés non étudiés dans une modélisation plane, les liaisons vues au paragraphe 1-2 ne sont plus qu'au nombre de 4 :

Nom de la liaison	Représentation dans le plan	Torseur statique $[S_0 \rightarrow S_1]$	Torseur cinématique $[V(1/0)]$
Encastrement		${}_O\begin{Bmatrix} X_O & - \\ Y_O & - \\ - & N_O \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ 0 & - \end{Bmatrix}$
Pivot		${}_O\begin{Bmatrix} X_O & - \\ Y_O & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ \Omega_z & - \end{Bmatrix}$
Glissière		${}_O\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_O & - \\ - & N_O \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} - & V_{Ox} \\ - & 0 \\ 0 & - \end{Bmatrix}$
Ponctuelle		${}_O\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_O & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}$	${}_O\begin{Bmatrix} - & V_{Ox} \\ - & 0 \\ \Omega_z & - \end{Bmatrix}_O$

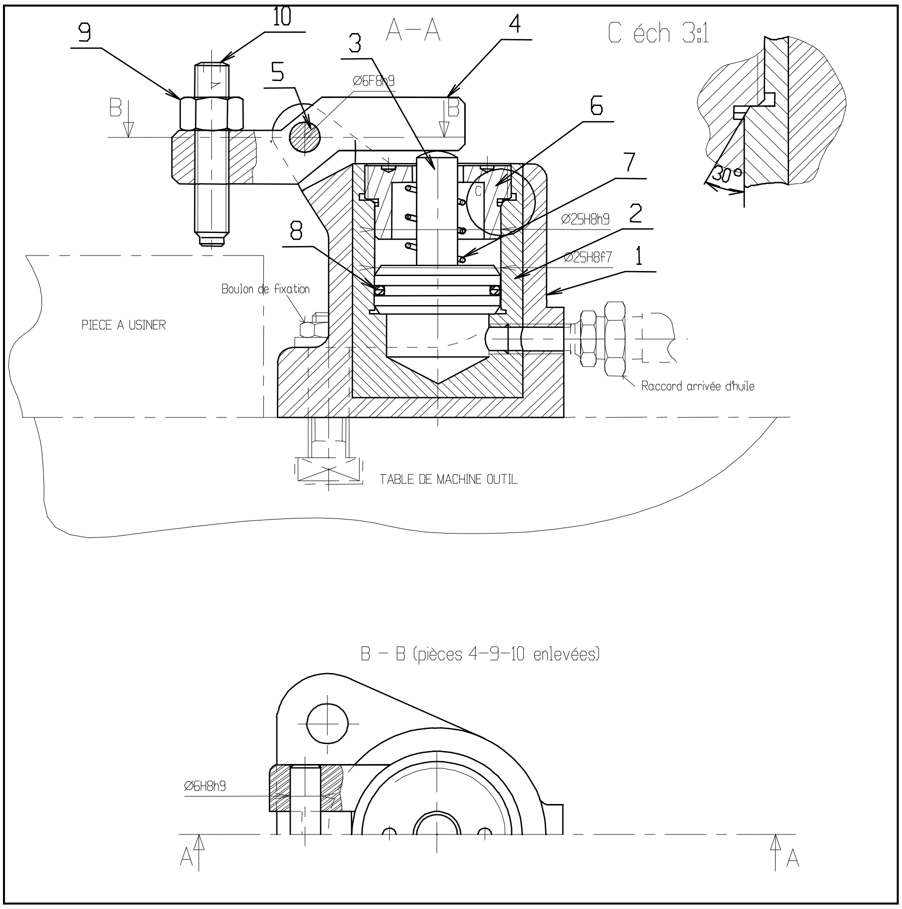
b) Le schéma de mouvement plan

L’obtention d’un tel schéma se fait en suivant la même démarche que celle vue dans les paragraphes 2-1 et 2-3.

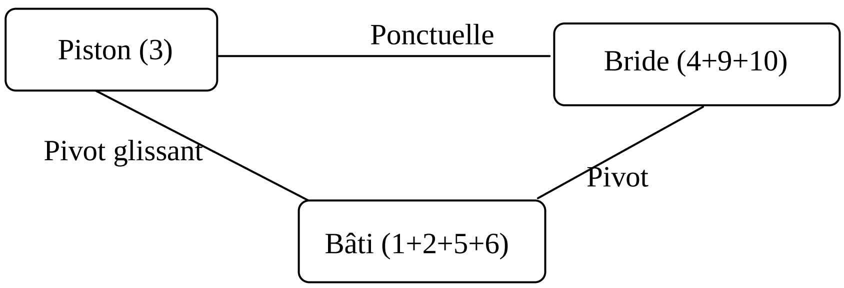
Par contre, le schéma simplifié obtenu correspond à un **schéma de mouvement**. Il ne faut donc pas confondre le schéma cinématique minimal représenté dans le plan et le schéma de mouvement qui est crée pour définir les mouvements relatifs des solides.

c) Exemple de schéma de mouvement dans le plan : Bride hydraulique

Soit un système de bride hydraulique représenté sur le plan ci-dessous :



Le graphe des liaisons de ce mécanisme est le suivant :



Le schéma cinématique minimal obtenu est donc le suivant :

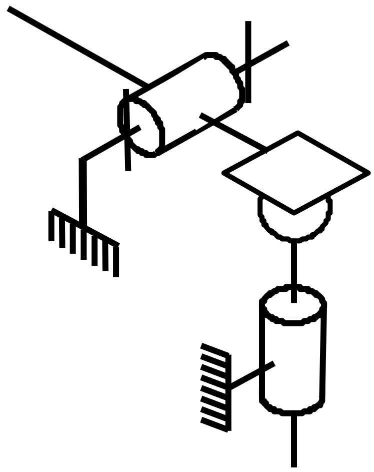
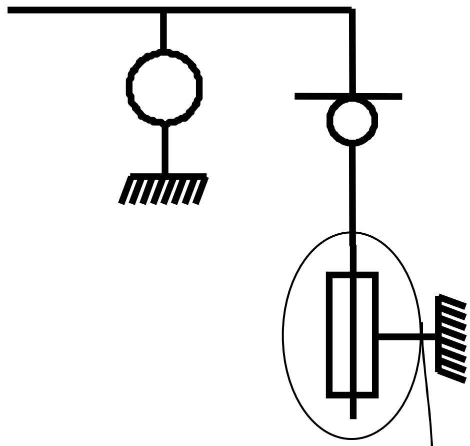
	

Schéma cinématique minimal en perspective	Schéma cinématique minimal dans le plan

Si on néglige la rotation du piston dans le bâti, on obtient les hypothèses nécessaires à une étude plane. La liaison pivot glissant devient une liaison glissière. Le schéma devient alors :

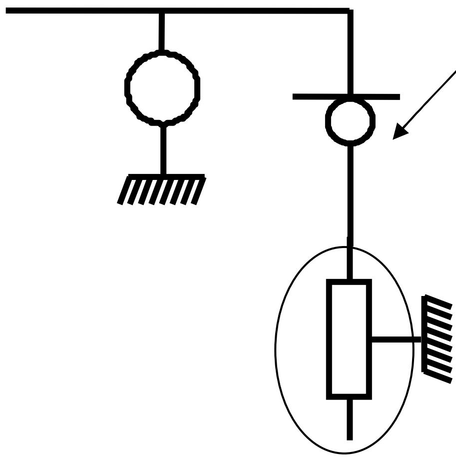


Schéma de mouvement pour une modélisation plane

3 - CHAINES CINEMATIQUES – STATICITE

3.1 - Hyperstaticité - mobilité

a) Définition

La chaîne cinématique d'un mécanisme est la modélisation des mouvements de chaque pièce tels qu'ils résultent des liaisons qui les déterminent. Son analyse permet de contrôler l'adéquation du mécanisme à la fonction attendue. Sa représentation est le graphe des liaisons.

Une chaîne cinématique est composée de *N* solides (bâti compris) assemblés par L liaisons. Les composantes des torseurs cinématiques et statiques sont les paramètres (ou inconnues) au nombre de :

- I_c pour les paramètres cinématiques indépendants : $I_c = \sum_{i=1}^{L} I_{ci}$ (cf. 1-2)
- I_s pour les paramètres statiques indépendants : $I_s = \sum_{i=1}^{L} I_{si}$ (cf. 1-2)

Soit un nombre total de paramètres :

$$I_c + I_s = 6L \qquad ①$$

Ces paramètres sont liés par des relations dont :

- r_s relations statiques indépendantes (application du PFS ou PFD)
- r_c relations cinématiques indépendantes. Ces relations peuvent par exemple être obtenues en écrivant la fermeture géométrique des torseurs cinématiques décrivant la chaîne.

b) Loi entrée-sortie

La loi *entrée- sortie* d'un mécanisme de transformation de mouvement est la relation existant entre les paramètres de position de la pièce d'entrée et les paramètres de position de la pièce de sortie. Il est possible d'obtenir cette loi en exprimant par exemple la fermeture géométrique de chacune des chaînes fermées de solides du mécanisme (voir le chapitre VII du tome I pour plus de détails).

c) Staticité

Si $I_s > r_s$, les r_s relations indépendantes ne permettent de déterminer qu'un même nombre d'inconnues statiques. Les autres restent indéterminées. Elles sont au nombre de :

$$\boxed{h = I_s - r_s} \qquad ②$$

h est le ***degré d'hyperstaticité*** du mécanisme

- **Mécanisme isostatique : h = 0**

En statique, ce sont les systèmes matériels dont les liaisons assurent exactement le positionnement. Il ne subsiste aucun degré de liberté. Cela peut être aussi un système non sollicité suivant les degrés de libertés restés libres.

- **Mécanisme hyperstatique : h > 0**

Ce sont des systèmes dont les contraintes géométriques imposées par les liaisons sont surabondantes. Pour des solides parfaits (par définition indéformables), le système est donc mathématiquement *indéterminé.*

Mais en réalité, tous les systèmes réels sont déformables et les déformations résultent précisément des actions mécaniques qu'ils subissent selon des lois physiques de comportement propres à chaque matériau.

Pour des raisons de sécurité, de résistance ou de rigidité, les systèmes réels sont pour la plupart hyperstatiques. Leur résolution ne peut donc se faire qu'en écrivant des relations supplémentaires traduisant les déformations imposées par les liaisons supplémentaires.

- **Avantages d'un mécanisme isostatique**

Un mécanisme isostatique présente les avantages suivants :

- Un positionnement rigoureux : Dans le cas d'un mécanisme de transformation du mouvement, on est sûr qu'il y aura un fonctionnement correct sans risque de blocage des pièces entre elles.
- Une connaissance exacte du torseur statique de chaque liaison. Cela permet une évaluation correcte des pressions entre les surfaces de contact et cela facilite le dimensionnement des pièces composant le mécanisme.
- Une facilité de fabrication grâce à l'absence de contraintes géométriques à respecter (parallélisme, perpendicularité, coaxialité…).
- Une assurance que les surfaces de liaisons sont bien en contact. Une construction isostatique assure une mise en position parfaite d'une pièce par rapport à une autre. De ce fait, tous les montages d'usinage sont isostatiques.

- **Inconvénients d'un mécanisme isostatique**

Les inconvénients d'un mécanisme isostatique sont les suivants :

- La rigidité d'un système isostatique est moindre que celle d'un système hyperstatique d'où une plus faible précision de guidage et des efforts transmis moins importants.
- Pour obtenir un système isostatique, il faut souvent augmenter le nombre de pièces à l'intérieur du mécanisme afin d'augmenter le nombre de degrés de liberté.

d) Mobilité

Si $I_c > r_c$, il reste de même des paramètres cinématiques indépendants au nombre de :

$$\boxed{m = I_c - r_c} \qquad ③$$

m est la mobilité du mécanisme. Si m=0, le mécanisme est immobile. Si m>0, le mécanisme est mobile à *m* degrés de mobilité.

La fermeture d'une chaîne cinématique pouvant être une opération longue et fastueuse, il est possible avec un peu d'expérience mais aussi avec un risque d'erreur plus grand, de déterminer la mobilité *m* d'un mécanisme en introduisant la notion de *mobilité externe* m_e et la notion de *mobilité interne* m_i.

On définit m_e, la mobilité externe ou utile, comme étant le nombre de paramètres cinématiques **indépendants** intervenant directement dans le fonctionnement du mécanisme. m_e correspond au nombre de paramètres d'entrée intervenant dans la loi entrée-sortie.

On définit m_i , la mobilité interne, comme étant une mobilité ne modifiant pas le fonctionnement du mécanisme.

On a alors : $\boxed{m = m_i + m_e}$