FONCTIONS NUMÉRIQUES

📖 Les notions indispensables

DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Théorème 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si f ' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extrémum relatif (maximum ou minimum) en x_0.
Les tableaux suivants traduisent les variations de f.
([a ; b] est un intervalle inclus dans I) :

f admet sur [a ; b] un maximum égal à $f(x_0)$ en x_0 :

x	a		x_0		b
signe de f '(x)		+	0	−	
variations de f		↗	$f(x_0)$	↘	

f admet sur [a ; b] un minimum égal à $f(x_0)$ en x_0 :

x	a		x_0		b
signe de f '(x)		−	0	+	
variations de f		↘	$f(x_0)$	↗	

PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

- Vérifier que l'intervalle proposé pour l'étude de la fonction ne contient pas de valeur interdite.
- Déterminer la fonction dérivée f ' de f sur l'intervalle I où elle est définie. L'écrire, si possible, sous forme factorisée ou sous une forme simple pour l'étude de son signe.
  Étudier et justifier le signe de f '(x) sur I.
- Calculer les valeurs exactes des images par f des nombres intervenant dans l'étude de la fonction :
  bornes de l'intervalle, valeurs annulant la dérivée…
  Construire le tableau de variation de la fonction sur I.
- Tracer la courbe représentative en précisant avec soin les points particuliers et les tangentes à ces points s'il y a lieu : extrémums, intersections avec les axes, tangentes horizontales et tangentes éventuelles demandées dans le texte.

TANGENTES AUX COURBES REPRÉSENTATIVES DE FONCTIONS

Coefficient directeur d'une tangente

Si f est dérivable en $x_0 \in$ I, alors la courbe C_f représentative de la fonction f admet au point A d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Équation de la tangente T à une courbe

On veut déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f d'équation $y = f(x)$ en un point A d'abscisse x_0

Méthode 1 : T a une équation de la forme $y = ax + b$, avec $a = f'(x_0)$.
On a donc : $y = f'(x_0)\,x + b$ et on calcule b en remarquant que le point A appartient à T, c'est-à-dire que les coordonnées de A, $(x_0, f(x_0))$ vérifient l'équation de T.

Méthode 2 : on peut mémoriser la formule obtenue dans le cas général :

$$y = (x - x_0)\,f'(x_0) + f(x_0).$$

POINTS PARTICULIERS DES COURBES REPRÉSENTATIVES DE FONCTIONS

• Le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées est le point d'abscisse $x = 0$ si 0 appartient à l'intervalle I, l'ordonnée de ce point est alors f(0).

• Les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont les solutions dans I de l'équation $f(x) = 0$.

• Pour trouver les abscisses des points en lesquels la tangente à une courbe C_f a un coefficient directeur m donné : on détermine, si elles existent, les solutions de l'équation $f'(x) = m$.

• Savoir déterminer les abscisses des points d'une courbe d'ordonnée k c'est savoir déterminer les solutions d'une équation du type f(x) = k, ($k \in \mathbb{R}$) et en donner des valeurs approchées.

POSITION RELATIVE DE DEUX COURBES

Pour déterminer la position relative d'une courbe C_f d'équation y = f(x) par rapport à une droite Δ d'équation y = ax + b, on étudie le signe de la différence f(x) − (ax + b) :

si f(x) − (ax + b) > 0, C_f est au dessus de Δ ;
si f(x) − (ax + b) < 0, C_f est en dessous de Δ ;
si f(x) − (ax + b) = 0, C_f coupe Δ.

De même, pour déterminer la position relative de deux courbes C_f et C_g d'équations respectives y = f(x) et y = g(x), on étudie le signe de la différence f(x) – g(x) :

si f(x) − g(x) > 0, C_f est au dessus de C_g ;
si f(x) − g(x) < 0, C_f est en dessous de C_g ;
si f(x) − g(x) = 0, C_f coupe C_g.

FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉS 2 ET 3

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors $f'(x) = 2ax + b$.

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

a, b, c et d sont des nombres réels, a étant non nul.

FONCTION QUOTIENT

f étant une fonction dérivable sur l'intervalle I :

si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ sur l'intervalle I.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

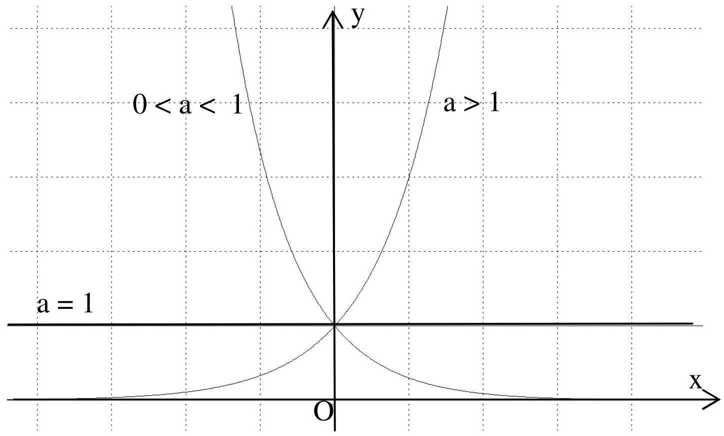
Définition

a étant un réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = a^x$.

Propriétés

• Les fonctions exponentielles sont les seules fonctions, dérivables sur $\mathbb{R}$, proportionnelles à leurs dérivées et prenant la valeur 1 en 0. Elles permettent de modéliser les phénomènes physiques ou biologiques dans lesquels la vitesse de croissance est proportionnelle à la taille de la population.

• Si 0 < a < 1, la fonction exponentielle est décroissante.
Si a > 1, la fonction exponentielle est croissante.
Si a = 1, f(x) = 1.



La figure ci-dessus indique le style de la représentation graphique d'une fonction exponentielle de base a suivant les valeurs de a.

FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Définition

On appelle fonction logarithme décimal, la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \log(x).$$

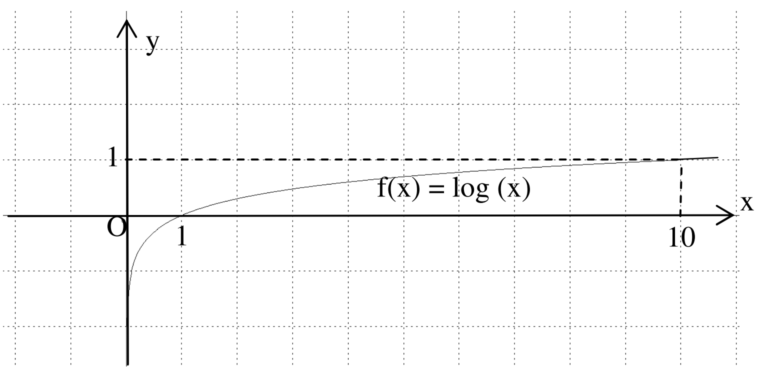
Propriétés

- La fonction logarithme décimal est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
- $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log(a^x) = x\log(a)$; $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$.

a et b sont des réels strictement positifs.

La courbe représentative de cette fonction est dessinée ci-dessous.

Courbe représentative de la fonction logarithme décimal



Résolution d'équations et d'inéquations

a et b sont deux réels strictement positifs et $a \neq 1$.

• Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathbf{a^x = b}$.

On utilise la fonction logarithme décimal et sa propriété : $\log(a^x) = x\log(a)$.

$\log(a^x) = \log(b)$

$x\log(a) = \log(b)$

$x = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$. L'ensemble solution est :

$$\boxed{S = \left\{\frac{\log(b)}{\log(a)}\right\}}$$

• Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\mathbf{a^x \geq b}$.

On utilise la croissance de la fonction logarithme décimal sur $]0\,;+\infty[$, on peut écrire les équivalences suivantes :

$a^x \geq b$

$\log(a^x) \geq \log(b)$

$x\log(a) \geq \log(b)$

Deux cas maintenant se présentent :

si $0 < a < 1$ alors $\log(a) < 0$, on change le sens de l'inéquation en divisant ses deux membres par $\log(a)$:

$x \leq \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$.

Si $a > 1$, $\log(a) > 0$, on ne change pas ici le sens de l'inéquation :

$x \geq \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$.

En résumé, l'inéquation $a^x \geq b$ admet pour ensemble solution :

$$\boxed{\begin{array}{l} S = \left]-\infty\,;\dfrac{\log(b)}{\log(a)}\right] \text{ si } 0 < a < 1 \\ S = \left[\dfrac{\log(b)}{\log(a)}\,;+\infty\right[\text{ si } a > 1 \end{array}}$$

• Le raisonnement est le même pour résoudre l'inéquation $a^x \leq b$.

• Pour résoudre dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'équation $\mathbf{\log(x) = a}$, $\mathbf{a \in \mathbb{R}}$, on remarque que $\log(10) = 1$ et on écrit :

$\log(x) = a \times \log(10)$

$\log(x) = \log(10^a)$, on en déduit la solution de l'équation :

$$\boxed{S = \{10^a\}}$$

• Pour résoudre, dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'inéquation **log (x) ≥ a**, on se sert de même de l'égalité $\log(10) = 1$:

$\log(x) \geq a \times \log(10)$

$\log(x) \geq \log(10^a)$, la fonction logarithme décimal est croissante :

$x \geq 10^a$.

$$\boxed{S = \left[10^a ; +\infty\right[}$$

Pour résoudre **log (x) ≤ a**, on trouve avec le même raisonnement $x \leq 10^a$.
Dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'ensemble solution est :

$$\boxed{S = \left]0 ; 10^a\right]}$$

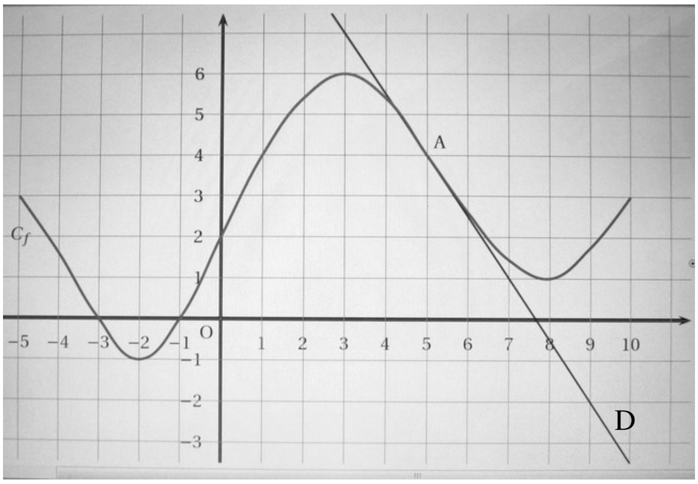
Les annales

MÉTROPOLE SEPTEMBRE 2013

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [–5 ; 10] dont la représentation graphique C_f est donnée ci-dessous.



La droite (D) est tangente à la courbe au point A d'abscisse 2.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation f (x) ≥ 0 est :

a) [0 ; 10] ; b) [–5 ; –3] ∪ [–1 ; 10] ; c) [–2 ; 3] ∪ [8 ; 10].

2. L'ensemble des solutions de l'équation f (x) = 0 est :

a) {2} ; b) {–3 ; –1} ; c) {–2 ; 3 ; 8}.

3. Le nombre dérivé de la fonction f en x = 5 est égal à :

a) 5 ; b) $-\frac{3}{2}$; c) –2.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; +1[par :

$$g(x) = 2\,500 \times 0{,}7^x.$$

1. L'image, arrondie à l'unité, de 5 par la fonction g est égale à :

a) 420 ; b) 8 750 ; c) 7 500.

2. Les solutions de l'inéquation $g(x) < 100$ sont les nombres réels x tels que :

$$\text{a) } x > \frac{\log(0{,}04)}{\log(0{,}7)} \;;\; \text{b) } x < \frac{\log(0{,}04)}{\log(0{,}7)} \;;\; \text{c) } x < \frac{\log(0{,}7)}{\log(0{,}04)}.$$

MÉTROPOLE JUIN 2011

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [70 ; 160] par la relation :

$$f(x) = -0{,}25x^2 + 60x - 2\,775.$$

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	70	100	120	130	160
f(x)				800	

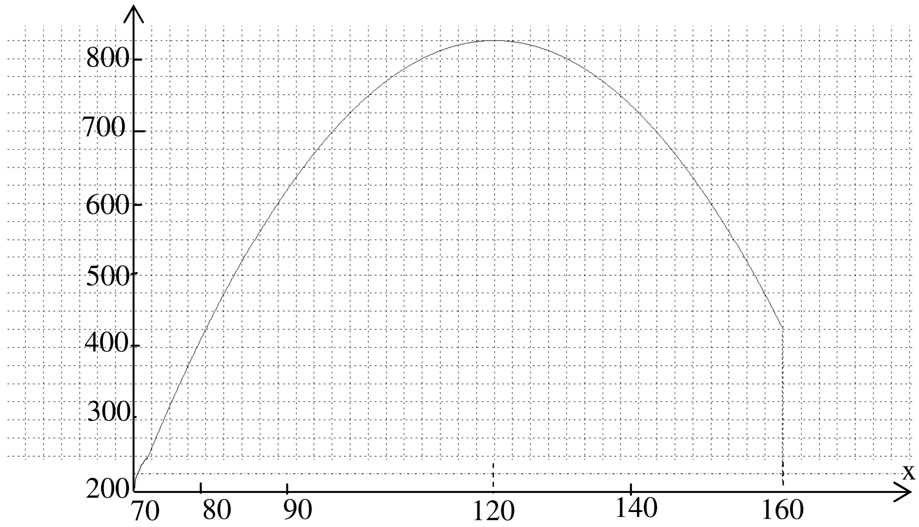
2. La fonction f admet sur l'intervalle [70 ; 160] une fonction dérivée. On note f ' cette fonction.

a) Calculer f '(x) pour x élément de l'intervalle [70 ; 160].

b) Étudier le signe de f '(x) sur l'intervalle [70 ; 160].

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [70 ; 160].

Partie B



Suite à l'installation d'une nouvelle antenne relais dans leur ville, les habitants d'un quartier, résidant à une distance comprise entre 70 mètres et 160 mètres de cette antenne, demandent une étude sur l'exposition aux champs électromagnétiques.