Thème 1

LES COMPLEXES

Rappels de cours

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Forme algébrique d'un complexe

La forme algébrique d'un nombre complexe z s'écrit $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i vérifie $i^2 = -1$.

x est la partie réelle du complexe z, $\Re e(z) = x$ et y sa partie imaginaire, $\Im m(z) = y$.

Dans un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

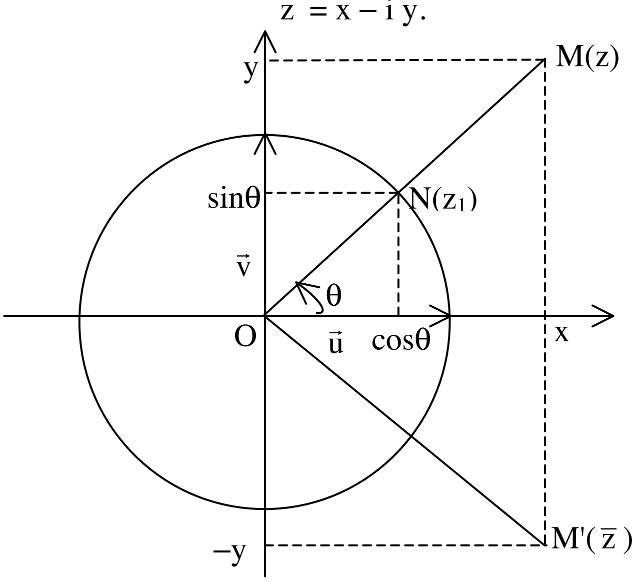
- le point M a pour coordonnées (x ; y) ;
- le point M a pour affixe $z = x + i\,y$;
- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z = x + i\,y$.

On appelle module du complexe z, le nombre réel positif noté $|\,z\,|$ égal à :

$$|\,z\,| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Le conjugué du nombre complexe z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ égal à :

$$\overline{z} = x - i\,y.$$



On appelle argument du complexe z, affixe du point M, l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Le complexe nul n'admet pas d'argument.

Forme trigonométrique, forme exponentielle

Si N est un point du cercle trigonométrique de centre O tel que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{ON}\right) = \theta$, l'affixe z_1 de N est $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ et son module est : $|z_1| = ON = 1$.

Soit z l'affixe non nulle du point M tel que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$, si on appelle r le module de z, $|z| = r$:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(forme trigonométrique)}$$

$$z = r\,e^{i\theta} \quad \text{(forme exponentielle).}$$

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses $(O ; \vec{u})$ ce qui se traduit par :

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = r\,e^{-i\theta}$$

$$|z| = |\bar{z}| \text{ et } \arg\bar{z} = -\arg z$$

Egalité de complexes

Un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont simultanément nulles.

Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire ou le même module et le même argument modulo 2π :

Soit : $z_1 = x_1 + i\,y_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

Propriétés des conjugués

$$z = x + i\,y = re^{i\theta} \; ; \; \bar{z} = x - i\,y = re^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \; ; \; y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \; ; \; \overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\text{Si } z \neq 0,\; \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$z\,z' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = r\,r'e^{i(\theta + \theta')}$$

$$|z\,z'| = |z|\,|z'| \text{ et si } z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0,\ \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$

$$\text{Si} \quad z \neq 0 \quad \text{et} \quad z' \neq 0, \quad \frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\text{Si } z' \neq 0, \ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \ \text{ et si de plus } z \neq 0, \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Equation du second degré à coefficients réels

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b\ ,c) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les solutions réelles :

$$z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$, les solutions sont les complexes conjugués :

$$z' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad z'' = \overline{z'} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Interprétation géométrique d'expressions complexes

Dans le repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$, si les points A, B, C et D ont pour affixes respectives a, b, c et d :

$b - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, $|\,b - a\,| = AB$ et si $a \neq b$ et $c \neq d$,

$\arg \dfrac{a-b}{c-d} = \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

Ecriture complexe d'une transformation

Dans le repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' et l'application f qui au point M associe le point M'.

$z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ f est la translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe b.

$z' = kz + b$ où $k \in \mathbb{C}^* \setminus \{\ 1\ \}$ et $b \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ f est une homothétie de rapport k.

$z' = e^{i\theta} z + b$ où $\theta \neq 0\ [2\pi\ ]$ et $b \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ f est une rotation d'angle θ.

Pour déterminer le centre de l'homothétie ou celui de la rotation, on détermine l'affixe de l'unique point invariant c'est-à-dire qui vérifie z' = z.

Si le point Ω d'affixe ω est le centre de l'homothétie ou de la rotation, il est souvent plus pratique d'utiliser les formules :

$$z' - \omega = k(z - \omega) \text{ ou } z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

EXERCICES

Exercice 1.1 (Nouvelle Calédonie 2005)..................................

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante.
Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Q_1	Pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$ $\cos(\theta^n) + i\sin(\theta^n)$ $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$	☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai
Q_2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ $\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai
Q_3	Soit z un complexe tel que $z = x + iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2 $-y^2$ $-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai
Q_4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a} = i\sqrt{3}$ alors :	$BC = 2AC$ $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA^2$	☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☐ Vrai

Corrigé 1.1 ....

La formule de Moivre donne $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$; Q_1 admet deux bonnes réponses, la première et la troisième.

- Si $z = x + iy$, $\Im m(z) = y$.

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = x\ ;\ \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{x+iy-x+iy}{2i} = y\ ;\ \frac{z-\overline{z}}{2} = iy.$$

Seule la réponse du milieu pour Q_2 est bonne.

Q_1	Pour tout entier n naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$ $\cos(\theta^n) + i\sin(\theta^n)$ $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$	☐ Faux ☒ Vrai ☒ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☒ Vrai
Q_2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\frac{z+\overline{z}}{2}$ $\frac{z-\overline{z}}{2i}$ $\frac{z-\overline{z}}{2}$	☒ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☒ Vrai ☒ Faux ☐ Vrai
Q_3	Soit z un complexe tel que $z = x + iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur alors $\lvert z^2 \rvert$ est égal à :	y^2 $-y^2$ $-z^2$	☐ Faux ☒ Vrai ☒ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☒ Vrai
Q_4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\frac{b-a}{c-a} = i\sqrt{3}$ alors :	$BC = 2AC$ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA^2$	☐ Faux ☒ Vrai ☒ Faux ☐ Vrai ☐ Faux ☒ Vrai

● Si z est un imaginaire pur, $x = 0$ et $\lvert z \rvert = \lvert iy \rvert = \lvert i \rvert \times \lvert y \rvert = \lvert y \rvert$.
$\lvert z \rvert^2 = \lvert y \rvert^2 = y^2$. La première réponse de Q_3 est bonne.
De plus $z = iy$ alors $z^2 = -y^2$ et $y^2 = -z^2$, la troisième réponse est correcte.

● On calcule avec les formules du cours le module et un argument du quotient :

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{\lvert b-a \rvert}{\lvert c-a \rvert} = \frac{AB}{AC} \text{ et } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right).$$

Le module et un argument du deuxième membre de l'égalité proposée donnent :

$$\left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} \text{ et } \arg\left(i\sqrt{3}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

On en déduit $AB = \sqrt{3}\,AC$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le triangle ABC est rectangle en A et on applique le théorème de Pythagore :
$AC^2 + AB^2 = BC^2$ soit $AC^2 + 3AC^2 = BC^2$ ce qui donne $BC^2 = 4AC^2$:
$BC = 2AC$, la première réponse de Q_4 est exacte. La deuxième réponse est fausse, c'est le signe contraire.
La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Le triangle ABC est rectangle en A alors $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA^2$.
La troisième réponse de Q_4 est vraie.

Exercice 1.2 (Amérique du Nord 2005)..................................

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2 + 3i$, $-3 - i$ et $2{,}08 + 1{,}98i$.

Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle ;
(b) : rectangle et non isocèle ;
(c) : rectangle et isocèle ;
(d) : ni rectangle ni isocèle.

2. A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4i}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $| z' | = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 ;
(b) : une droite ;
(c) : une droite privée d'un point ;
(d) : un cercle privé d'un point.

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle ;
(b) : une droite ;
(c) : une droite privée d'un point ;
(d) : un cercle privé d'un point.

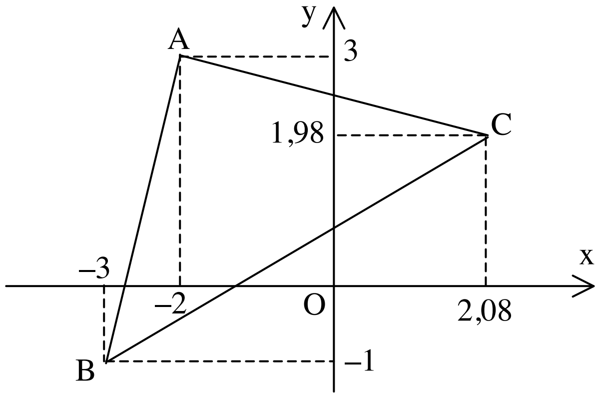
4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$; (b) : $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(c) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$; (d) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Corrigé 1.2...

1. Une figure permet de mieux visualiser le triangle ABC.



On peut déterminer les trois longueurs des trois côtés du triangle ABC :

AB = $|z_B - z_A|$ = $|-3 - i + 2 - 3i|$ = $|-1 - 4i|$ = $\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.

AC = $|z_C - z_A|$ = $|2{,}08 + 1{,}98i + 2 - 3i|$ = $|4{,}08 - 1{,}02i|$.

AC = $\sqrt{4{,}08^2 + 1{,}02^2}$ = $\sqrt{17{,}6868}$.

BC = $|z_C - z_B|$ = $|2{,}08 + 1{,}98i + 3 + i|$ = $|5{,}08 + 2{,}98i|$.

BC = $\sqrt{5{,}08^2 + 2{,}98^2} = \sqrt{34{,}6868}$.

Aucune des trois longueurs n'est égale à une autre, le triangle ABC ne peut être isocèle.

La réciproque du théorème de Pythagore peut-elle être appliquée ?

$AB^2 = 17$; $AC^2 = 17{,}6868$ et $BC^2 = 34{,}6868$.

On remarque que $AB^2 + AC^2 = 17 + 17{,}6868 = 34{,}6868 = BC^2$.

Le triangle est rectangle en A.

La bonne réponse est la (b).

2. Appelons A le point d'affixe a = 4i et B celui d'affixe b = –2, on peut écrire :

$$|z'| = \left|\frac{z-4i}{z+2}\right| = \frac{|z-4i|}{|z+2|} = \frac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} = \frac{AM}{BM}.$$

L'égalité $|z'| = 1$ se traduit pour tout $z \neq -2$ c'est-à-dire pour tout point M différent du point B par AM = BM.

M est à égale distance des points A et B, dans le plan l'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB]. Cette médiatrice ne contient évidemment pas le point B, aucun point n'est à rejeter.

La bonne réponse est la (b).

3. z' est réel si le point M' d'affixe z' vérifie dans le repère complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$: M' = O ou M' $\neq$ O et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0\ [\pi]$.

M' = O si z = 4i soit M = A ;

si M' ≠ O, $\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM'}\right)$ = arg z' = $\arg\left(\dfrac{z-4i}{z+2}\right) = \arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BM}\ ,\ \overrightarrow{AM}\right)$

arg z' $= \left(\overrightarrow{MB}\ ,\ \overrightarrow{MA}\right) = 0\ [\pi]$, cela signifie que M appartient à la droite (AB) privée des points A et B.

En résumé M appartient à la droite (AB) privée du point B.

La bonne réponse est la (c).

4. La rotation a pour centre D et pour angle $-\dfrac{\pi}{3}$, son écriture complexe est donnée par :

$z' - z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_D)$ soit $z' - i = \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)(z-i)$

$z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-i) + i = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i$.

$z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

La bonne réponse est la (a).

Exercice 1.3 (Polynésie sept. 2005)..

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}\ ,\ \vec{v})$

1. Le point M est situé sur le cercle de centre A(–2 , 5) et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a) $|z - 2 + 5i|^2 = 3$; b) $|z + 2 - 5i|^2 = 3$; c) $|z - 2 + 5i| = 3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes :

$$\frac{z-b}{c-a} \text{ et } \frac{z-c}{b-a} \text{ sont imaginaires purs.}$$

a) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
b) M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AD] ;
c) M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4i, et C un point du cercle de diamètre [AB].
On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.