

Table des matières

I	Généralités sur les groupes de Lie	1
1	Définitions	2
2	Exemples de groupes de Lie	6
II	Algèbre de Lie et représentation adjointe	21
1	L'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur une variété	21
2	Première forme de la définition de l'algèbre de Lie	24
3	Seconde forme de la définition	25
4	Remarques	26
5	Algèbres de Lie des sous-groupes de Lie et des groupes produit	27
6	La représentation coadjointe	29
7	Exemples d'algèbres de Lie	30
8	Calcul formel en coordonnées dans un groupe de Lie	34
9	Algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe	38
III	Formes différentielles de Maurer-Cartan	43
1	Définition des formes droite et gauche	43
2	Parallélisations des fibrés tangent et cotangent d'un groupe de Lie	46
3	Différentielles droites et gauches	47
4	Mesures de Haar sur un groupe de Lie	50
IV	L'application exponentielle d'un groupe de Lie	55
1	Sous-groupes à un paramètre et champs de vecteurs invariants	55
2	Définition de l'exponentielle	57
3	Application exponentielle d'un sous-groupe de Lie	59
4	Exemples d'applications exponentielles	60
5	Formule de Taylor dans un groupe de Lie	64
6	Différentielles droite et gauche et dérivées de Lie	65
7	Différentielles de la représentation adjointe	65
8	Différentielles droite et gauche de l'exponentielle	68
9	Coordonnées canoniques	73
10	Formule de Campbell-Hausdorff-Dynkin	74
V	Opération d'un groupe de Lie sur une variété	79
1	Généralités sur les opérations de groupes	79
2	Groupe de Lie opérant une variété, champs fondamentaux	81
3	Action de \mathbb{G} sur les fonctions	87
4	Interprétation cinématique	88
5	Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique	89
6	Fibrés principaux	94

6.1.	Construction d'un fibré principal par recollement de fibrés triviaux.	98
6.2.	Construction d'un fibré principal à partir d'un cocycle	99
6.3.	Théorème d'existence de la structure de fibré principal.	100
VI	Homomorphismes et représentations	103
1	Homomorphismes de groupes de Lie	103
2	Représentations linéaires	106
3	Quelques exemples	108
4	Représentations des groupes compacts : compléments	114
VII	Produits semi-directs	119
1	Produits semi-directs, aspects algébriques	119
2	Produit semi-direct de groupes de Lie	120
3	Exemples de produits semi-directs	122
VIII	Espaces tangent et cotangent d'un groupe de Lie	125
1	Groupe tangent d'un groupe de Lie	125
2	Second groupe tangent d'un groupe de Lie	126
3	Structure symplectique de l'espace cotangent d'un groupe de Lie	128
4	Systèmes hamiltoniens sur $T^*\mathbb{G}$	130
IX	Relations entre sous-groupes et sous-algèbres de Lie	135
1	Introduction	135
2	Sous-groupes intégraux	137
3	Sous-groupes fermés	140
4	Normalisateurs et centralisateurs	143
5	Groupe adjoint d'un groupe de Lie	145
6	Groupe des commutateurs d'un groupe de Lie connexe	146
7	Série dérivée et série centrale d'un groupe de Lie connexe	148
8	Un critère de différentiabilité des homomorphismes	150
X	Quotients, espaces homogènes	151
1	Structure différentielle d'un quotient	151
2	Décomposition canonique des homomorphismes de groupes de Lie	158
3	Structure différentielle des orbites	159
4	Structure symplectique des orbites de la représentation coadjointe	162
5	Complément : structure de Poisson sur \mathfrak{g}^*	165
XI	Le groupe de Poincaré d'un groupe de Lie connexe	167
1	Groupe de Poincaré d'un espace topologique, rappels	167
2	Commutativité du groupe de Poincaré d'un groupe de Lie	169
3	Prolongement des homomorphismes locaux	172
XII	Revêtements des groupes de Lie	177
1	Généralités sur les revêtements	177
2	Cas des groupes de Lie	181

XIII	Groupe des automorphismes d'un groupe de Lie	189
1	Relation entre $\text{Aut}(\mathbb{G})$ et $\text{Aut}(\tilde{\mathbb{G}})$	189
2	Relations $\text{Aut}(\mathbb{G})$ et $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, structure de $\text{Aut}(\mathbb{G})$	190
3	Application aux produits semi-directs	191
4	Compléments	194
XIV	Connexions linéaires invariantes sur un groupe de Lie	195
1	Généralités sur la notion de connexion	195
2	Connexions canoniques	197
3	Connexions bi-invariantes	202
4	Connexion de Levi-Civita associée à une structure riemannienne invariante	203
5	Structures pseudo-riemanniennes bi-invariantes	206
6	Théorème de H. Weyl	209
XV	Aperçu sur quelques types de groupes de Lie	211
1	Détermination des groupes de Lie commutatifs connexes	211
2	Groupes de Lie nilpotents et résolubles	211
	2.1. Groupes de Lie nilpotents	212
	2.2. Groupes de Lie résolubles	216
	2.3. Complément : radical d'un groupe de Lie	217
3	Groupes de Lie semi-simples	218
4	Groupes de Lie compacts : tores maximaux	220
	4.1. Torres maximaux d'un groupe de Lie compact.	221
	4.2. Théorème de conjugaison des tores maximaux	222
	4.3. Centralisateur et normalisateur d'un tore	225
5	Groupes de Lie semi-simples et groupes compacts	228
XVI	Géométrie différentielle des fibrés principaux	233
1	Champs de vecteurs fondamentaux d'un fibré principal	233
2	Connexions dans un fibré principal	234
	2.1. Champs de vecteurs horizontaux, relèvements	236
	2.2. Courbure d'une connexion principale	238
	2.3. Expressions locales d'une connexion	239
3	Fibré des repères et connexions linéaires	240
	3.1. Dérivation covariante	243
	3.2. Parallélisme et géodésiques	248
XVII	Note historique	249
1	La notion de groupe	249
2	Sophus Lie	250
	2.1. La collaboration entre Lie et Klein	251
	2.2. L'influence des travaux de Jacobi	252
	2.3. Naissance de la théorie des groupes continus	254
3	Les travaux de Killing sur la classification des algèbres de Lie	257
4	Les travaux d'Elie Cartan sur les algèbres de Lie	259
5	Autres travaux sur les algèbres de Lie	260
6	De la théorie locale à la théorie globale	261
7	Lie et les mathématiciens de Paris du début du XXème siècle	263
8	Travaux sur les fibrés principaux et physique	264

A	Généralités sur les algèbres de Lie	265
1	Définitions	265
2	Série centrale et série dérivée d'une algèbre de Lie	269
3	Extension du corps des scalaires d'une algèbre de Lie	271
4	Formes réelles d'une algèbre de Lie complexe	273
5	Représentations linéaires d'algèbres de Lie	274
6	Formes bilinéaires invariantes sur une algèbre de Lie, forme de Killing	277
7	Algèbres de Lie semi-simples	279
8	Représentations semi-simples	283
9	Produit semi-direct d'algèbres de Lie	283
10	Théorèmes de Levi-Maltsev et d'Ado	284
11	Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie	285
B	Généralités sur les groupes topologiques	287
1	Définitions	287
	1.1. Sous-groupes topologiques	288
	1.2. Groupes quotients	289
2	Groupe topologique opérant continûment	290
3	Groupe localement compact opérant proprement	291
4	Sous-groupes et groupes quotients du groupe \mathbb{R}^n	294
	4.1. Sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n	294
	4.2. Sous-groupes fermés de \mathbb{R}^n	296
	4.3. Sous-groupes de \mathbb{Z}^n	297
	4.4. Sous-groupes associés de \mathbb{R}^n	299
	4.5. Structure des groupes quotient de \mathbb{R}^n et de \mathbb{T}^n	300
	4.6. Image dans \mathbb{T}^n d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n	302
C	Variétés différentielles	303
1	Fonctions analytiques	303
2	Variétés différentielles	307
3	Fibrés vectoriels	308
4	Subimmersions, immersions, submersions	312
	4.1. Structure locale des subimmersions	313
	4.2. Deux critères de différentiabilité	314
5	Sous-variétés et sous-variétés immergées	315
6	Théorème du plongement	318
7	Systèmes différentiels	320
	7.1. Théorème de Frobenius	320
	7.2. Structure des intégrales d'une distribution involutive	323
	7.3. Un critère de différentiabilité	325
	Exercices	327
	Bibliographie	365
	Index	367