Chapitre premier
Généralités sur les groupes de Lie

La notion de groupe de Lie réalise la synthèse des structures de groupe et de variété différentielle et permet ainsi l'usage conjoint d'opérations de l'algèbre et du calcul différentiel. A l'origine les groupes de Lie ont été introduits en tant que groupes "continus" de transformations, groupes dont les éléments sont déterminés en fonction de paramètres réels ou complexes et qui agissent dans des espaces vectoriels $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$; de tels groupes s'introduisent naturellement en géométrie. D'un point de vue formel on a d'abord considéré des transformations de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ de la forme

$$x \mapsto x' = f(a, x)$$

où $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble de paramètres dont les valeurs caractérisent la transformation. Il était de plus supposé que l'ensemble de ces transformations contient la transformation identité $x \mapsto x' = x$ et est stable par composition (mais les fondateurs de la théorie n'ont pas immédiatement eu conscience de la nécessité de supposer l'existence d'une transformation inverse appartenant à l'ensemble ; l'inverse existait en fait dans tous les exemples traités). Il existe ainsi une fonction m définie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que

$$f\Big(a, f(a', x)\Big) = f(m(a, a'), x).$$

et l'étude des propriétés des fonctions f et m, notamment de leurs développements limités au voisinage de la valeur des paramètres correspondant à la transformation identité, a constitué le point de départ de la théorie de Lie. Toutes les fonctions étaient bien entendu supposées différentiables autant que nécessaire.
Un exemple typique de cette situation, considéré dès l'origine, est celui des fonctions homographiques de la forme

$$x \mapsto x' = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ avec } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

dépendant des quatre paramètres $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, b, c, d)$, qui constituent un groupe de transformations agissant dans $\mathbb{R}$ et pour lequel on détermine aisément la fonction m (pour être rigoureux il conviendrait de considérer ici des transformations de $\mathbb{R}$ complété par un point à l'infini ou bien de la droite projective ou encore de la sphère de Riemann quand on travaille avec les complexes). Avec des réels a, b, c, d tels que $ad - bc = 1$ on peut aussi définir les fonctions homographiques $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ de la variable complexe z. Ces fonctions appliquent sur lui-même le demi-plan supérieur $\Im z > 0$ du plan complexe et constituent un groupe qui peut être identifié au groupe des déplacements de la géométrie de Lobatschevski. (Les recherches sur la classification des diverses géométries ont joué un rôle décisif dans l'émergence de la théorie de Lie. Le modèle de Klein de la géométrie

de Lobatschevski est le demi-plan supérieur du plan complexe muni de la métrique riemannienne $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ et son groupe des déplacements est plus exactement le groupe quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{-1,1\}$ qui est en correspondance bijective avec les fonctions homographiques considérées.)
Deux idées précises se dégagent de ces considérations :
– l'existence d'un groupe $\mathbb{G}$ dont les éléments peuvent être déterminés par des coordonnées $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$,
– l'expression avec ces coordonnées de la loi de composition de $\mathbb{G}$ est une application différentiable (représentée par m).
En substance, c'est la définition d'un groupe de Lie qui sera posée dans la section 1, définition autonome qui ne suppose pas que le groupe apparaisse comme un groupe de transformations. Le concept de groupe opérant sur un ensemble, qui était présent dès l'origine et a ensuite joué un rôle croissant dans les mathématiques et dans leurs applications en mécanique et en physique, peut ensuite être introduit indépendamment et sera envisagé dans le chapitre V.

1 Définitions

I.1 Définition. *Un groupe de Lie (réel) est un ensemble $\mathbb{G}$ muni :*
– d'une structure de groupe (dont on notera e l'élément neutre),
– d'une structure de variété analytique réelle (et de dimension finie),
telles que l'opération du groupe $(g,h) \mapsto g.h$ soit une application analytique de $\mathbb{G}\times\mathbb{G}$ dans $\mathbb{G}$.

Donnons quelques premières indications sur le calcul différentiel dans un groupe de Lie. Dans la suite on notera $\tau(\mathbb{G}) = (T\mathbb{G},\mathbb{G},o)$ le fibré tangent à la variété $\mathbb{G}$; l'application $o\colon T\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ est la projection qui au vecteur tangent $\boldsymbol{x}\in T\mathbb{G}$ associe son origine $g\in\mathbb{G}$. On notera $T_g\mathbb{G}$ l'espace vectoriel tangent en g. Pour g fixé, les translations par g à droite et à gauche $L_g\colon x\mapsto g.x$ et $R_g\colon x\mapsto x.g$ sont des applications partielles associées à $\mathbb{G}\times\mathbb{G}\to\mathbb{G}$, donc des applications analytiques de $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{G}$ ainsi que leurs applications réciproques $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$; par suite L_g et R_g sont des difféomorphismes. Les propriétés des applications tangentes aux difféomorphismes impliquent que, pour chaque $x\in\mathbb{G}$:

$$L_g^T \text{ (resp. } R_g^T\text{) induit un isomorphisme linéaire de } T_x\mathbb{G} \text{ sur } T_{g.x}\mathbb{G} \text{ (resp. } T_{x.g}\mathbb{G}\text{).}$$

(Dans ce livre, on notera généralement f^T et non pas Tf l'application tangente à une application d'une variété dans une autre). Il en résulte que tous les espaces vectoriels tangents $T_g\mathbb{G}$, $g\in\mathbb{G}$, sont isomorphes à $T_e\mathbb{G}$ de deux façons naturelles :

$$\mathbf{u}\,(\in T_e\mathbb{G}) \mapsto \left\{\begin{array}{l} L_g^T(\mathbf{u}) \\ \\ R_g^T(\mathbf{u}) \end{array}\right. \quad \in T_g\mathbb{G}.$$

Pour l'instant l'espace tangent $T_e\mathbb{G}$ en l'élément neutre est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Dans le chapitre II $T_e\mathbb{G}$ sera muni d'une structure naturelle d'algèbre de Lie que l'on notera $\mathfrak{g}$ et qui joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes de Lie.

Si l'on identifie $T(\mathbb{G}\times\mathbb{G})$ et $T\mathbb{G}\times T\mathbb{G}$, il résulte des propriétés des variétés produit que l'application tangente au produit $\pi\colon (x,y)\mapsto x.y$ dans $\mathbb{G}$ s'exprime par

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mapsto \pi^T(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = R_y^T(\boldsymbol{v}) + L_x^T(\boldsymbol{w}), \quad o(\boldsymbol{v}) = x,\ o(\boldsymbol{w}) = y. \qquad \text{(I.1)}$$

I.1 Proposition. *Dans un groupe de Lie la symétrie* $\imath\colon x \mapsto x^{-1}$ *est une application analytique dans* $\mathbb{G}$ *et son application tangente s'exprime par :*

$$\boldsymbol{v} \mapsto \imath^T(\boldsymbol{v}) = -L^T_{x^{-1}} \circ R^T_{x^{-1}}(\boldsymbol{v}), \quad o(\boldsymbol{v}) = x. \tag{I.2}$$

Preuve : Soient $a \in \mathbb{G}$ et $b = a^{-1}$. L'application tangente partielle

$$T_y\pi(a, y)\colon \boldsymbol{w} \mapsto L^T_a(\boldsymbol{w})$$

détermine un *isomorphisme linéaire* de $T_b\mathbb{G}$ sur $T_e\mathbb{G}$ et le théorème de la fonction implicite entraîne l'existence d'un voisinage ouvert V de a et d'une fonction analytique $\varphi\colon V \to \mathbb{G}$ telle que $\pi(x, \varphi(x)) = e$ pour tout $x \in V$. Nécessairement $\varphi(x) = x^{-1} = \imath(x)$ pour tout x dans V et $\imath$, analytique au voisinage de chaque point de $\mathbb{G}$, est analytique sur $\mathbb{G}$. La relation $\pi(x, \imath(x)) = e$ entraîne $R^T_{x^{-1}}(\boldsymbol{v}) + L^T_x\Big(\imath^T(\boldsymbol{v})\Big) = \mathbf{0}_e$ pour $\boldsymbol{v} \in T_x\mathbb{G}$ et (I.2). □

Il s'ensuit, qu'en définitive, toutes les applications construites naturellement à partir des opérations algébriques du groupe sont analytiques. Les automorphismes intérieurs $\alpha_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$ tels que $\alpha_g(x) = g.x.g^{-1}$ sont des difféomorphismes donc, pour chaque g, l'application tangente α_g^T induit un automorphisme de l'espace vectoriel $T_e\mathbb{G}$ dont l'étude sera reprise dans les sections II.2 et II.3 à propos de la représentation adjointe du groupe $\mathbb{G}$.

Examinons maintenant quelques conséquences de la définition du point de vue purement topologique. Un groupe de Lie est en particulier un groupe topologique (c'est-à-dire un groupe muni d'une topologie pour laquelle les applications $(g, h) \mapsto g.h$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues, cf. annexe B) et toutes les notions définies dans les groupes topologiques ont donc un sens pour un tel groupe. Notamment :

I.2 Proposition. *1) La topologie d'un groupe de Lie* $\mathbb{G}$ *est* localement compacte et métrisable *et peut être déterminée par une distance* d *invariante à gauche :*

$$d(gx, gy) = d(x, y) \;\; \textit{pour} \;\; x,\, y,\, g \in \mathbb{G},$$

distance pour laquelle $\mathbb{G}$ *est un espace* complet. *(Une propriété analogue est valable avec une distance invariante à droite).*
2) Si $\mathbb{G}^\circ$ *est la composante connexe de* e *(composante neutre de* $\mathbb{G}$*), alors :*
– $\mathbb{G}^\circ$ *est un* sous-groupe distingué, ouvert et fermé *de* $\mathbb{G}$*,*
– $\mathbb{G}^\circ$ *est un espace topologique* séparable et à base dénombrable.
3) Pour qu'un groupe de Lie soit un groupe topologique à base dénombrable (resp. séparable) il faut et il suffit que l'ensemble de ses composantes connexes soit dénombrable.
4) Un groupe de Lie de dimension 0 *est simplement un groupe muni de sa topologie discrète ;* $\mathbb{G}^\circ$ *est alors réduit à* $\{e\}$.

(Notons que, pour les groupes non commutatifs, l'existence d'une distance déterminant la topologie de $\mathbb{G}$ et qui soit invariante à la fois à gauche et à droite n'est pas assurée en général, toutefois cf. section XIV.5 pour le cas des groupes compacts).

Preuve : Le point e de $\mathbb{G}$ admet un voisinage V homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont les propriétés topologiques se transmettent à V. Le caractère métrisable de la topologie est une propriété générale des groupes topologiques admettant un système fondamental dénombrable de voisinages de e (cf. [11] Ch. XII section 9) et l'existence d'un voisinage de e complet entraîne que $\mathbb{G}$ est complet.

La première propriété de $\mathbb{G}^\circ$ est une propriété générale des groupes topologiques. On montre de plus que si V est un voisinage *symétrique* de e tel que $V \subset \mathbb{G}^\circ$ alors, V^n désignant l'ensemble des produits de n éléments de V(cf. annexe 1.1.) :

$$\mathbb{G}^\circ = \bigcup_{n \geq 1} V^n.$$

Si S est une partie dénombrable dense dans V alors $\cup_{n\geq 1} S^n$ est une partie dénombrable dense dans $\mathbb{G}^\circ$ qui est donc un espace *séparable*. Etant métrisable, c'est aussi un espace topologique à base dénombrable.
La troisième propriété est une conséquence de la seconde puisque dans un espace à base dénombrable (resp. séparable) toute union d'ouverts non vides deux à deux disjoints est dénombrable. La réciproque résulte du fait que l'union d'une suite d'ensembles dénombrables est dénombrable. La quatrième propriété découle du fait qu'une variété de dimension 0 est un espace topologique discret. □

Remarques
1) La classe de groupes concernée par la définition I.1 ne changeraient pas si l'on supposait l'existence d'une structure de variété différentielle $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^k$. En effet, le théorème de Gleason, Montgomery, Zippin caractérise les groupes topologiques ayant une structure de groupe de Lie : si $\mathbb{G}$ est un groupe topologique muni d'une structure de variété topologique, c'est-à-dire que
– les applications $(g, h) \mapsto g.h$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues,
– il existe un voisinage ouvert de e homéomorphe à une boule ouverte d'un espace $\mathbb{R}^n$,
$\mathbb{G}$ possède alors une structure de groupe de Lie réel unique (solution du cinquième problème de Hilbert. Pour un résultat plus précis cf. [6] chap. 3 section 8 n^o 2).
Dans les applications à de nombreuses questions de géométrie différentielle et aux sciences physiques on ne s'appuie d'ailleurs le plus souvent que sur l'existence d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ (ou même $\mathcal{C}^k$) de $\mathbb{G}$.

2) En supposant dans la définition I.1 l'existence d'une structure de variété analytique non plus réelle mais complexe on définirait des groupes de Lie complexes ayant du point de vue du calcul différentiel, et non du point de vue topologique, des propriétés analogues aux groupes de Lie réels (cf. [6] ou [11] T. IV, chap. XIX, section 17). On peut même définir des groupes de Lie sur des corps plus généraux (cf. [6]).

3) La définition I.1 peut être étendue à des groupes de Lie de dimension infinie, notamment des groupes qui sont des variétés de Banach et qui du point de vue du calcul différentiel ont des propriétés analogues aux groupes de dimension finie (cf. [6] chap. 3). De tels groupes peuvent s'introduire en mécanique (cf. [1] Appendice 2).

Conformément aux principes généraux d'étude des structures, la structure de groupe de Lie donne naissance à des notions d'homomorphisme et d'isomorphisme et de sous-groupe de Lie :

I.2 Définition. *Si $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ sont des groupes de Lie une application $f : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ est un homomorphisme de groupes de Lie si f est un homomorphisme de groupes et une application* analytique. *Un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{G}'$ est un isomorphisme de groupes qui est analytique ainsi que l'isomorphisme réciproque. Les automorphismes d'un groupe de Lie sont les isomorphismes du groupe sur lui-même.*

Les propriétés de ces homomorphismes seront examinées en détail dans le chapitre VI, celles des groupes d'automorphismes dans le chapitre XIII.

La notion de sous-groupe de Lie donne lieu à des subtilités, reflétant la distinction entre sous-variétés immergées ou plongées ([1]), ce qui conduit à distinguer les sous-groupes qui sont des sous-variétés *immergées* et ceux, plus particuliers, qui sont des sous-variétés (*plongées*) de $\mathbb{G}$. Des groupes de Lie très simples se présentent naturellement comme des sous-groupes d'un groupe de Lie sans être des sous-variétés. Un exemple est celui des sous-groupes à un paramètre denses du tore $\mathbb{T}^n$, qui sont isomorphes au groupe additif $\mathbb{R}$ mais ne sont que des sous-variétés immergées dans $\mathbb{T}^n$ (cf. exemples IV.2 et IX.1).

I.3 Définition. *Un* sous-groupe de Lie (plongé) *d'un groupe de Lie* $\mathbb{G}$ *est un sous-groupe* $\mathbb{H}$ *qui est une sous-variété de* $\mathbb{G}$.
Un sous-groupe de Lie immergé *d'un groupe de Lie* $\mathbb{G}$ *est un sous-groupe* $\mathbb{H}$ *qui est muni d'une struture de groupe topologique (topologie propre) et qui est une sous-variété immergée de* $\mathbb{G}$.

Un sous-groupe plongé, dont la topologie est *induite* par celle de $\mathbb{G}$, est un groupe topologique et aussi un sous-groupe immergé mais il n'y a pas de réciproque. La topologie propre d'un sous-groupe immergé est en général plus fine que la topologie induite par celle de $\mathbb{G}$; d'après le théorème du plongement, lorsque les deux topologies coïncident un sous-groupe immergé est en fait une sous-variété et un sous-groupe de Lie plongé.
Dans la suite sous-groupe de Lie (sans plus) s'entendra toujours comme sous-groupe plongé. Mais notons que, selon les auteurs, la définition adoptée pour les sous-groupes de Lie peut être l'une ou l'autre des deux notions introduites dans la définition I.3. Par exemple, les ouvrages [6] ou [11] adoptent la définition selon laquelle un sous-groupe de Lie est une sous-variété plongée. Les ouvrages [8], [19], [21] et [24] adoptent la définition selon laquelle c'est une sous-variété immergée.

Remarque. Il existe une forme légèrement plus générale de la définition I.3 d'un sous-groupe immergé, qui sera utilisée par la suite et est intéressante pour mieux faire ressortir les distinctions entre ce qui est propre à $\mathbb{H}$ et ce qui est induit par $\mathbb{G}$:

Un sous-groupe de Lie immergé *d'un groupe de Lie* $\mathbb{G}$ *est un groupe de Lie* $\mathbb{H}$ *pour lequel existe un homomorphisme* $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ *qui est une immersion injective.*

Dans ce cas ce n'est pas à proprement parler $\mathbb{H}$ qui est un sous-groupe de $\mathbb{G}$ mais son image $j(\mathbb{H})$ qui peut être munie de la topologie transportée de $\mathbb{H}$ par l'application continue j, une topologie plus fine que la topologie induite. La définition I.3 concerne le cas où $\mathbb{H}$ se présente d'emblé comme un sous-groupe auquel cas j est l'injection canonique.

La terminologie est justifiée par le fait qu'un sous-groupe de Lie immergé muni de sa propre structure de variété, *a fortiori* un sous-groupe de Lie plongé, est effectivement un groupe de Lie en vertu du résultat général suivant :

I.3 Proposition. *Soient* $\mathbb{G}$ *un groupe de Lie et* $\mathbb{H}$ *un sous-groupe de* $\mathbb{G}$ *tel que*
– $\mathbb{H}$ *est une sous-variété immergée de* $\mathbb{G}$,
– $\mathbb{H}$ *est un groupe topologique (pour la topologie propre de la variété* $\mathbb{H}$*).*
Alors $\mathbb{H}$ *est un groupe de Lie (pour sa structure de variété propre).*

[1]Rappelons qu'une sous-variété immergée d'une variété $\mathbb{M}$ est une partie $\mathbb{N}$ de $\mathbb{M}$ *qui est munie de sa propre structure de variété* telle que l'injection naturelle $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ soit une *immersion*. Il en résulte que la topologie propre de $\mathbb{N}$ est plus fine que la topologie induite par $\mathbb{M}$. Lorsque la topologie propre de $\mathbb{N}$ coïncide avec la topologie induite, $\mathbb{N}$ est alors une sous-variété *plongée* de $\mathbb{M}$ (théorème du plongement). Pour plus de précisions voir annexe C.

Preuve : Par hypothèse, l'injection canonique $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ est une immersion analytique et le produit $\pi_{\mathbb{H}}\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ est une application continue pour la topologie propre de $\mathbb{H}$. D'après une propriété classique des immersions (cf. annexe 4.2.), pour que $\pi_{\mathbb{H}}$ soit analytique il suffit alors que $j \circ \pi_{\mathbb{H}}$ soit une application analytique et, comme $j \circ \pi_{\mathbb{H}} = \pi_{\mathbb{G}} \circ (j \times j)$, c'est évident. □

I.4 Proposition. *Un sous-groupe de Lie plongé $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$ est nécessairement fermé.*

Cela résulte d'une propriété générale : dans un groupe topologique séparé, tout sous-groupe topologique qui est un espace localement compact est fermé. Comme une sous-variété est localement fermée on pourrait aussi utiliser le fait que tout sous-groupe localement fermé d'un groupe topologique est fermé (cf. annexe 1.1.).
Notons d'ores et déjà que, réciproquement, le théorème de Cartan (cf. théorème IX.4) montrera que si un sous-groupe $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$ est une partie fermée alors $\mathbb{H}$ est une sous-variété de $\mathbb{G}$, donc un groupe de Lie (plongé). Ce résultat remarquable, selon lequel une propriété de géométrie différentielle est conséquence d'une propriété purement topologique souvent facile à vérifier, permet d'être assuré de *l'existence* d'une structure de groupe de Lie sur de nombreux groupes ; il s'applique par exemple immédiatement aux sous-groupes classiques de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ou $\mathrm{Ga}(n,\mathbb{R})$ ou aux groupes de transformations caractérisés par l'invariance de certains éléments.

I.5 Proposition. *Lorsque $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$ sont des groupes de Lie, le groupe produit $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$ muni des structures de groupe produit et de variété produit est un groupe de Lie. Plus généralement le produit d'un nombre fini de groupes de Lie est un groupe de Lie.*

Preuve : Il suffira de donner le principe de la démonstration dans les cas d'un produit de deux groupes de Lie. Il faut montrer que l'application

$$(\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2) \times (\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2) \to \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2\colon ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1h_1, g_2h_2)$$

est analytique. Compte tenu de la définition d'une variété produit, il suffit de prouver que chacune des applications $((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto g_ih_i$ $(i = 1, 2)$ est analytique. Or ces applications sont de la forme $(\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2) \times (\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2) \to \mathbb{G}_i \times \mathbb{G}_i \to \mathbb{G}_i$, composées d'une projection et du produit dans $\mathbb{G}_i$, donc d'applications analytiques. □

2 Exemples de groupes de Lie

Exemple I.1. Groupe additif $\mathbb{R}^n$ et tore $\mathbb{T}^n$
Munis de leur structures de variétés naturelles le groupe additif $\mathbb{R}^n$ et le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sont des groupes de Lie.
Rappelons que le tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n est le groupe quotient de $\mathbb{R}^n$ par la relation d'équivalence $x - y \in \mathbb{Z}^n$ associée au sous-groupe $\mathbb{Z}^n$; un élément de ce groupe est donc une classe $\bar{x} = x + \mathbb{Z}^n$ et la loi d'addition est déterminée par $\bar{x} + \bar{y} = x + y + \mathbb{Z}^n$ de sorte que la projection canonique $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, $x \mapsto \bar{x}$ est un homomorphisme. En particulier, pour $n = 1$ on obtient le tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dont les éléments sont les classes $\bar{x} = x + \mathbb{Z}$ (et l'on convient que $\mathbb{T}^0$ est le groupe réduit à l'élément neutre).
Précisons la construction de la structure de groupe de Lie de $\mathbb{T}^n$. Par définition d'une topologie quotient, les ouverts de $\mathbb{T}^n$ sont les parties $U \subset \mathbb{T}^n$ telles que $p^{-1}(U)$ soit ouvert

dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire les images des ouverts de $\mathbb{R}^n$ saturés pour la relation d'équivalence $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Dans le cas présent le saturé de tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est ouvert. Posons

$$\|x\| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|, \quad \mathcal{U}_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < 1/2\} \text{ pour } a \in \mathbb{R}^n.$$

On montre aisément que p applique bijectivement $\mathcal{U}_a$ sur un ouvert $p(\mathcal{U}_a) = U_a$ de $\mathbb{T}^n$ et que la bijection réciproque $\varphi_a \colon U_a \to \mathcal{U}_a \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme de U_a sur $\mathcal{U}_a$. Les cartes (U_a, φ_a) pour $a \in \mathbb{R}^n$ constituent alors un atlas dont les applications de transition sont de la forme $x \mapsto x + k$ avec $k \in \mathbb{Z}^n$ constant sur chaque composante connexe de $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ et sont donc analytiques (cf. figure I.1). La loi du groupe $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y}$ s'exprime *localement* dans les cartes par des relations de la forme $(x, y) \mapsto x + y + h$ avec $h \in \mathbb{Z}^n$ constant et est donc analytique.

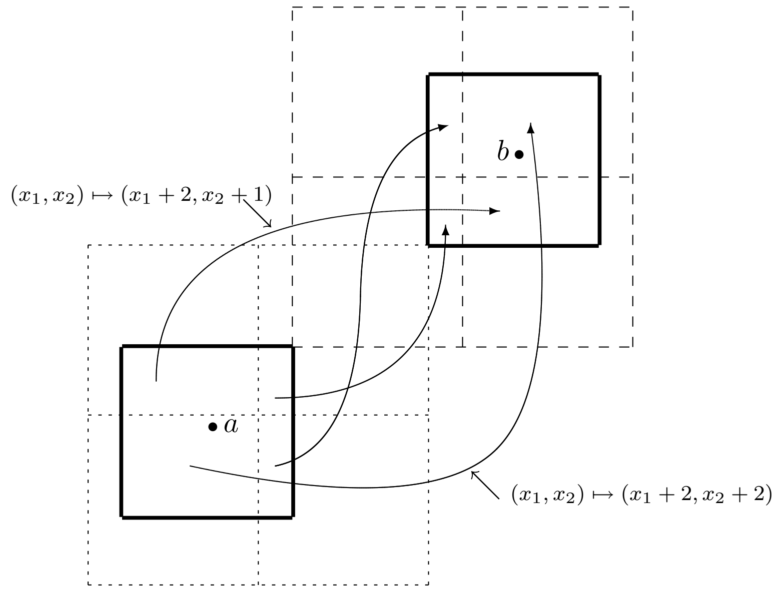

FIG. I.1 – Application de transition entre deux cartes du tore $\mathbb{T}^2$

Il résulte de la définition que $\mathbb{T}^n$ est un espace topologique *compact* (c'est l'image du compact $[0, 1]^n$ par une application continue, la projection $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$).
Pour $n \geq 1$, en tant que groupe de Lie, $\mathbb{T}^n$ est isomorphe au produit $\mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}$ de n exemplaires de $\mathbb{T}$, ce qui justifie la notation.
On montrera plus généralement que tout groupe de Lie commutatif connexe de dimension n est isomorphe à un groupe quotient de la forme $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n/\mathbb{L}$ où $\mathbb{L}$ est un sous $\mathbb{Z}$-module discret de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \leq n$, c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{L} = \{a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}\}$; à un isomorphisme près, ces sous-groupes sont donc de la forme $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ (cf. section XV.1).

Exemple I.2. Groupes $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{U}$
Soient $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls et $\mathbb{U}$ le sous-ensemble formé des nombres complexes dont le module est égal à 1. $\mathbb{C}^*$ est un groupe de Lie réel dont la loi est la multiplication des nombres complexes et l'élément neutre est 1 (la vérification est immédiate : les expressions des parties réelle et imaginaire d'un produit de nombres complexes sont polynômiales donc analytiques) et $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de Lie compact de $\mathbb{C}^*$ (en tant que sous-variété c'est le cercle représenté par les points tels que $x^2 + y^2 = 1$ du plan $\mathbb{R}^2$). L'étude des angles en trigonométrie s'appuie en fait sur deux propriétés :

1. l'application $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ est un *homomorphisme surjectif* du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ ([2]),
2. le noyau de cet homomorphisme est $\mathbb{Z}$ et l'isomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ qui s'en déduit est un isomorphisme de groupes de Lie.

(Le second point signifie précisément que l'isomorphisme est un difféomorphisme lorsque $\mathbb{U}$ est muni de sa structure de sous-variété de $\mathbb{R}^2$.)
Plus généralement, l'application $t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto \Big(\exp(2i\pi t_1), \dots, \exp(2i\pi t_n)\Big)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{U}^n$ (produit de n exemplaires de $\mathbb{U}$) est un homomorphisme surjectif dont le noyau est $\mathbb{Z}^n$. On en déduit un isomorphisme de groupes de Lie $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n \to \mathbb{U}^n$.

Une classe importante de groupes de Lie est constituée des groupes linéaires. Les principaux d'entre eux sont introduits dans les exemples ci-dessous et, dans ce chapitre ou les suivants, on mettra en évidence certaines de leurs propriétés. Toutefois une étude détaillée de ces groupes sortirait du cadre de ce livre et l'on pourra se reporter au livre [25] et [12] qui sont consacré à ce sujet.

Exemple I.3. Groupe linéaire réel $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (n **entier** ≥ 1)
Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de format $n \times n$ et par x_{ij}, pour $i, j = 1, \dots, n$, l'application qui associe à un élément g de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le terme de la ligne i et de la colonne j. Alors $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété ouverte de la variété analytique $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et les applications $g \mapsto x_{ij}(g)$ constituent un système de coordonnées sur $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. L'expression de la loi du groupe dans ces coordonnées, à savoir

$$x_{ij}(g.h) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}(h),$$

montre que l'application $(g, h) \mapsto g.h$ est analytique donc que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie réel. Bien que cela ne soit pas nécessaire on pourrait d'ailleurs vérifier directement, en utilisant les formules exprimant les termes d'une matrice inverse à l'aide de déterminants, que l'application $g \mapsto g^{-1}$ est analytique.

Exemple I.4. Groupes matriciels
Les groupes matriciels sont les sous-groupes de Lie (plongés) de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. De nombreux groupes classiques entrent dans cette catégorie, par exemple le groupe unimodulaire $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, le groupe symplectique réel $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ (avec n pair dans ce dernier cas). Rappelons que :

$$\begin{aligned} g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &\iff g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{dét}(g) = 1, \\ g \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) &\iff g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^t g g = I, \\ g \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) &\iff g \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{dét}(g) = 1, \end{aligned}$$

$$g \in \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{R}) \iff g \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad {}^t g S g = S \text{ où } S = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}).$$

Un autre exemple est le groupe de Lorentz $\mathrm{Lor}(n, \mathbb{R})$ (qui pour $n = 4$ est le groupe intervenant en électromagnétisme et en théorie de la relativité) :

$$g \in \mathrm{Lor}(n, \mathbb{R}) \iff g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^t g \Lambda g = \Lambda \quad \text{où} \quad \Lambda = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1).$$

[2]Pour la cohérence précisons qu'on suppose ici que l'application exponentielle $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ a été étudiée, par exemple comme somme de la série entière $\sum z^n/n!$, et qu'on a déduit les propriétés du "cercle trigonométrique", la bijection entre ses points et les angles et les fonctions circulaires.