Chapitre 1

Dénombrement

1.1 Points essentiels

Vocabulaires :

Notations	Vocabulaire
$\varnothing$	ensemble vide
Ω	ensemble plein
$\{\omega\}$	singleton de Ω
A	partie de Ω
$\omega \in A$	ω appartient à A
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω
$A \cup B$	union de A et B
$A \cap B$	intersection de A et B
$A - B$	intersection de A et $\overline{B}$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont disjoints
$A \subset B$	A est inclus dans B

Opérations :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B), \qquad \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

Lois de Morgan :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

Partition : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une partition de $E \Leftrightarrow (A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont disjoints deux à deux et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = E$.

Cardinal : Le nombre des éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E. Il est noté $\mathrm{Card}(E)$.

Formule du crible à l'ordre 2 :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Formule du crible à l'ordre n :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in U_k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}\right),$$

où $U_k = \{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k;\ \ i_1 < \cdots < i_k\}$.

Propriétés du cardinal :

$$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0, \qquad A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(\complement_E A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A),$$

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B}),$$

$$\mathrm{Card}(A - B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B),$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

Principe additif : On considère une situation qui nous amène à faire un choix parmi n cas différents et exclusifs : le cas 1, ou le cas 2..., ou le cas n. Si, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, il y a u_k possibilités pour le k-ème cas, alors le nombre total de possibilités est $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Principe multiplicatif : On considère une situation conjuguant k étapes : une étape 1, une étape 2..., et une étape k. Si, pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, il y a n_i possibilités pour la k-ème étape, alors le nombre total de possibilités est $\prod\limits_{i=1}^{k} n_i$.

Ensembles classiques par l'exemple : Le choix de $k = 2$ éléments dans $E = \{a,b,c\}$ peut se faire en répétant ou non un élément, en ordonnant ou non les éléments choisis.

Les possibilités de chaque type de choix sont des éléments constituant un ensemble. Les possibilités, ainsi que les cardinaux des ensembles associés, sont confectionnés dans le tableau suivant :

Choix	avec répétition	sans répétition
avec ordre	Listes : $\left.\begin{array}{ccc}(a,a) & (a,b) & (a,c)\\(b,a) & (b,b) & (b,c)\\(c,a) & (c,b) & (c,c)\end{array}\right\}9$	Arrangements : $\left.\begin{array}{cc}(a,b) & (a,c)\\(b,a) & (b,c)\\(c,a) & (c,b)\end{array}\right\}6$
sans ordre	Combinaisons avec répétition : $\left.\begin{array}{ccc}[a,a] & [a,b] & [a,c]\\ [b,b] & [b,c] & [c,c]\end{array}\right\}6$	Combinaisons (sans répétition) : $\left.\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{b,c\}\right\}3$

Les permutations des éléments des 3 éléments de E sont : (a,b,c), (b,a,c), (a,c,b), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a). Il y en a 6.

Cardinaux d'ensembles classiques : E un ensemble à n éléments,

- Card($\{$listes de k éléments de $E\}$) $= n^k$,
- Card($\{$arrangements de k éléments de $E\}$) $=$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$
- Card($\{$permutations des n éléments de $E\}$) $= A_n^n = n!$,
- Card($\{$combinaisons de k éléments parmi $n\}$) $=$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
- Card($\{$partitions $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ de E avec Card$(E_i) = n_i\}$) $=$
$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-\sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i}{n_k} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(n_i!)}.$$
- Card($\{$combinaisons avec répétition de k éléments de $E\}$) $=$
$$K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

1.2 Exercices types

Exercice 1

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et A, B, C et D quatre parties de E définies par

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7\}, \quad D = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

1. Calculer $\overline{A}$.
2. Calculer $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.
3. Calculer $(A \cup C) \cap (B \cup D)$.
4. Calculer $\overline{(\overline{A} \cap D)} \cap \overline{(B \cup C)}$.

Solution 1.

1. On a
$$\overline{A} = \complement_E A = \{5, 6, 7\}.$$
2. On a
$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{4\}$$
et
$$C \cap D = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{3, 5\}.$$
Par conséquent,
$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{4\} \cup \{3, 5\} = \{3, 4, 5\}.$$
3. On a
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$
et
$$B \cup D = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$
Par conséquent,
$$(A \cup C) \cap (B \cup D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 7\}.$$
4. On a
$$\overline{A} = \{5, 6, 7\}, \qquad \overline{A} \cap D = \{5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{5, 6\},$$
$$\overline{\overline{A} \cap D} = \{1, 2, 3, 4, 7\},$$
$$B \cup C = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}, \qquad \overline{B \cup C} = \{2\}.$$

Donc

$$\overline{(\overline{A} \cap D)} \cap \overline{(B \cup C)} = \{1,2,3,4,7\} \cap \{2\} = \{2\}.$$

Remarque : pour calculer $\overline{\overline{A} \cap D}$ et $\overline{B \cup C}$, on aurait pu utiliser :

$$\overline{\overline{A} \cap D} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{D} = A \cup \overline{D}, \qquad \overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}.$$

Exercice 2

Soient $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{1,4,6\}$. Calculer $\text{Card}(A \cup B)$:

1. directement.
2. en utilisant la formule du crible (à l'ordre 2) :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Solution 2.

1. On a $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$. Donc

$$\text{Card}(A \cup B) = 5.$$

2. On a $\text{Card}(A) = 4$, $\text{Card}(B) = 3$ et, comme $A \cap B = \{1,4\}$, $\text{Card}(A \cap B) = 2$. Il vient

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 4 + 3 - 2 = 5.$$

Exercice 3

Une association de consommateurs note un produit selon 3 critères :
- *Facilité d'utilisation :* bonne, moyenne, mauvaise,
- *Prix :* cher, pas cher,
- *Coût de maintenance :* cher, moyen, pas cher.

Combien y a t-il de possibilités de classement pour un produit ?

Solution 3. Il y a 3 possibilités pour la facilité d'utilisation, 2 pour le prix et 3 pour le coût de maintenance. Par le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités de classement est

$$3 \times 2 \times 3 = 18.$$

Exercice 4

Un code secret se compose de deux symboles : le premier doit être choisi dans la grille A et le deuxième, dans la grille B :

Grille A

♣	♢	♠	♡	□
◊	⧫	ð	★	℧

Grille B

⊟	⊖	⊛	⊚

(Les symboles sont tous différents). Combien y-a-t'il de codes différents ?

Solution 4. Il y a 10 possibilités pour le premier symbole, et 4 pour le deuxième. Par le principe multiplicatif, le nombre total de codes différents est

$$4 \times 10 = 40.$$

Exercice 5

Un disque compact comprenant 10 morceaux est introduit dans un lecteur disposant de la touche Random Play. Celle-ci permet d'écouter une et une seule fois chacun des 10 morceaux du disque dans un ordre aléatoire. Après appui sur cette touche, combien y a-t-il d'enchaînements distincts possibles ?

Solution 5. Il y a 10 possibilités pour le premier morceau, 9 pour le deuxième..., et 1 pour le dixième. Donc le nombre d'enchaînements distincts possibles est

$$10 \times 9 \times \ldots \times 1 = 10! = 3628800.$$

Autre formulation : on s'intéresse au nombre de permutations de 10 éléments. Le résultat est

$$10! = 3628800.$$

Exercice 6

Un questionnaire contient 5 questions, dont chacune a deux réponses possibles : Oui ou Non. Combien y a-t-il de façons pour compléter ce questionnaire en ayant au moins un Oui.

Solution 6. Le nombre de façons pour compléter le questionnaire en ayant au moins un Oui est égal au nombre de façons de compléter le questionnaire, soit 2^5, moins le nombre de façons d'avoir que des Non, soit 1. Ainsi, le résultat recherché est

$$2^5 - 1.$$

Exercice 7

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Déterminer le nombre de combinaisons de 3 éléments de E.
2. Déterminer le nombre d'arrangements de 3 éléments de E.
3. Écrire méthodiquement :
   – les combinaisons de 3 éléments de E,
   – les arrangements de 3 éléments de E.
   Retrouver les résultats des questions 1 et 2.

Solution 7.

1. Comme E est un ensemble à 4 éléments, le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est
$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$
2. Comme E est un ensemble à 4 éléments, le nombre d'arrangements de 3 éléments de E est
$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$
3. – Les combinaisons de 3 éléments de E sont $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$ et $\{a, c, d\}$. On a 4 combinaisons différentes.
   – Les arrangements de 3 éléments de E sont
$$\begin{array}{cccccc} (a,b,c), & (a,c,b), & (a,b,d), & (a,d,b), & (a,c,d), & (a,d,c), \\ (b,a,c), & (b,c,a), & (b,a,d), & (b,d,a), & (b,c,d), & (b,d,c), \\ (c,a,b), & (c,b,a), & (c,a,d), & (c,d,a), & (c,b,d), & (c,d,b), \\ (d,a,b), & (d,b,a), & (d,a,c), & (d,c,a), & (d,b,c), & (d,c,b). \end{array}$$
   On a 24 arrangements différents. On retrouve les résultats des questions 1 et 2.

Exercice 8

On lance une pièce de monnaie équilibrée 5 fois de suite et on relève dans l'ordre l'apparition de Pile ou Face.

1. Quel est le nombre de suites possibles ?
2. Quel est le nombre de suites comportant exactement 2 Piles ?

Solution 8.

1. Il y a 2 possibilités pour le premier lancer, 2 pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au cinquième. Donc le nombre de mots de passe possibles est
$$2^5 = 32.$$
2. Une suite de 5 lancers contenant exactement 2 Piles est une combinaison de 2 Piles parmi 5 lancers. Donc le résultat est
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$$

Exercice 9

Dans un jeu standard de 32 cartes, on choisit au hasard et simultanément 5 cartes. On dit alors que l'on a une main de 5 cartes.

1. Combien de mains de 5 cartes peut-on choisir ?

Combien de mains de 5 cartes peut-on choisir contenant :

2. les 4 as.
3. aucun carreau.
4. au moins un carreau.

Solution 9.

1. Une main de 5 cartes est une combinaison de 5 cartes parmi 32. Par conséquent, le nombre de mains de 5 cartes est
$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!(32-5)!} = 201376.$$
2. Une main de 5 cartes contenant 4 as est constituée de tous les as et d'une autre carte prise parmi les 28 qui ne sont pas des as. Par conséquent, le nombre total de possibilités est 28.
3. Une main de 5 cartes ne contenant aucun carreau est constituée de 5 cartes prises parmi les 24 qui ne sont pas des carreaux. Par conséquent, le nombre total de possibilités est
$$\binom{24}{5} = \frac{24!}{5!(24-5)!} = 42504.$$