Thème 1 – Les nombres

Pourquoi ?

Vous utilisez des nombres différents depuis le début de votre scolarité. En primaire, vous avez travaillé avec des nombres entiers puis, au collège, vous avez rencontré les nombres négatifs, les fractions, celles qui s'écrivent sous forme décimale et celles qui ne s'écrivent pas sous forme décimale. Vous avez fait la connaissance avec le nombre π en particulier en géométrie pour le calcul du périmètre d'un cercle ou de l'aire d'un disque. En travaillant la propriété de Pythagore, vous avez été amené à calculer des racines carrées, nombres qui, parfois, donnent un nombre entier ou alors qui donnent un résultat avec un nombre infini de chiffres après la virgule.
Ce chapitre va vous permettre de faire le point sur l'ensemble de ces connaissances.

Savoir reconnaître les ensembles de nombres

L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.

Exemples

Les nombres $0, 1, 2, 3, 4$ sont des entiers naturels.

L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.

C'est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés.

Exemples

Les nombres $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ sont des entiers relatifs.

Remarque

On dit que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

L'ensemble des décimaux se note $\mathbb{D}$.

C'est l'ensemble des nombres qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemples

Les nombres $1{,}5$ et $-3{,}647$ sont des décimaux.

Remarque

Un entier relatif est un décimal.

Exemples

$56 = 56{,}0$

$-24 = -24{,}0$

On dit que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est inclus dans l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$ et on note $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

L'ensemble des rationnels se note $\mathbb{Q}$.
C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme quotient de deux entiers relatifs.
Exemples
Les nombres $\frac{3}{4}$ et $-\frac{17}{123}$ sont des rationnels.

Remarque:
Un nombre décimal est un rationnel.
Exemples
$12{,}76 = \frac{1276}{100}$
$-4{,}1 = -\frac{41}{10}$
$0{,}75 = \frac{3}{4}$
On dit que l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ est inclus dans l'ensemble des décimaux $\mathbb{Q}$ et on note $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Attention, un rationnel n'est pas forcément un nombre décimal
Exemple
$\frac{2}{3}$ a un nombre infini de chiffres après la virgule.

Les nombres qui ne sont pas rationnels, c'est-à-dire qui ne peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs, sont appelés irrationnels.
Exemples
Les nombres $\pi, \sqrt{2}, -\sqrt{7}$ sont des irrationnels.

L'ensemble de tous les nombres précédents est l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.
Tous ces ensembles sont imbriqués les uns dans les autres, on parle d'inclusion :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

❖ EXERCICES

Exercice 1

Pour chaque proposition, cocher la case VRAI ou la case FAUX.
Dans le cas du FAUX, donner un contre-exemple.

Proposition	VRAI	FAUX	Contre-exemple
Un entier naturel est un entier relatif.			
Un irrationnel est un réel.			
Un décimal est un entier relatif.			
Un rationnel est un décimal.			
Un entier relatif est un réel.			

Exercice 2

Donner, comme pour l'exemple donné en première ligne, les ensembles auxquels appartient chacun des nombres suivants :

Nombre	Ensembles auxquels il appartient
10	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
$\frac{1}{3}$	
-6	
$\sqrt{11}$	
$\frac{3}{4}$	
$-10,56$	
π	

Savoir travailler avec les intervalles

Un intervalle est un ensemble de nombres réels.
Il existe plusieurs types d'intervalles :

- ceux qui contiennent les nombres compris entre deux nombres réels donnés ;
- ceux qui contiennent les nombres supérieurs à un nombre réel donné ;
- ceux qui contiennent les nombres inférieurs à un nombre réel donné.

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux ensembles de nombres compris entre deux nombres réels.

Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

L'ensemble des nombres réels compris entre a et b se note $[a\ ;\ b]$.
Dire qu'un nombre réel x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$ peut s'écrire : $x \in [a\ ;\ b]$ ou $a \leq x \leq b$.

Attention ! Les crochets sont très importants. Ici ils sont fermés c'est-à-dire tournés vers l'intérieur de l'intervalle. Cela signifie que le nombre x est compris entre a et b mais peut aussi être égal à a ou à b.

- **EXEMPLE**

  L'ensemble des nombres réels compris entre 2 et 10 est l'intervalle $[2\ ;\ 10]$

  $3 \in [2\ ;\ 10]$

  $5{,}76 \in [2\ ;\ 10]$

  $9{,}248 \in [2\ ;\ 10]$

$2 \in [2\ ;\ 10]$ car le crochet est fermé en 2
$10 \in [2\ ;\ 10]$ car le crochet est fermé en 10

L'ensemble des nombres réels strictement compris entre a et b se note $]a\ ;\ b[$.
Dire qu'un nombre réel x appartient à l'intervalle $]a\ ;\ b[$ peut s'écrire : $x \in]a\ ;\ b[$ ou $a < x < b$.

Les crochets sont ouverts c'est-à-dire tournés vers l'extérieur de l'intervalle. Cela signifie que le nombre x est compris entre a et b mais ne peut être égal à a ou à b.

- **EXEMPLE**

L'ensemble des nombres réels strictement compris entre $-4{,}5$ et $3{,}76$ est l'intervalle $]-4{,}5\ ;\ 3{,}76[$.
$0 \in]-4{,}5\ ;\ 3{,}76[$
$1{,}7 \in]-4{,}5\ ;\ 3{,}76[$
$-2{,}35 \in]-4{,}5\ ;\ 3{,}76[$
$-4{,}5 \notin]-4{,}5\ ;\ 3{,}76[$ car le crochet est ouvert en $-4{,}5$
$3{,}76 \notin]-4{,}5\ ;\ 3{,}76[$ car le crochet est ouvert en $3{,}76$

Dire qu'un nombre réel x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b[$ peut s'écrire : $x \in [a\ ;\ b[$ ou $a \leq x < b$.

Le crochet est fermé en a et ouvert en b. Cela signifie que le nombre x est compris entre a et b.
De plus il peut être égal à a mais pas à b.

❖ **EXEMPLE**

$10 \in [5\ ;\ 37[$

$9{,}7 \in [5\ ;\ 37[$

$5 \in [5\ ;\ 37[$ car le crochet est fermé en 5

$37 \notin [5\ ;\ 37[$ car le crochet est ouvert en 37

Dire qu'un nombre réel x appartient à l'intervalle $]a\ ;\ b]$ peut s'écrire : $x \in]a\ ;\ b]$ ou $a < x \leq b$.

Le crochet est ouvert en a et fermé en b. Cela signifie que le nombre x est compris entre a et b.
De plus il peut être égal à b mais pas à a.

❖ **EXEMPLE**

$3{,}7 \in]0\ ;\ 9{,}65]$

$7 \in]0\ ;\ 9{,}65]$

$9{,}65 \in]0\ ;\ 9{,}65]$ car le crochet est fermé en 9,65

$0 \notin]0\ ;\ 9{,}65]$ car le crochet est ouvert en 0

Intéressons nous maintenant aux ensembles de nombres supérieurs à un nombre réel donné.

Considérons un nombre réel a.

Dire qu'un nombre réel x est supérieur ou égal au réel a peut s'écrire : $x \in [a\ ;\ +\infty[$ ou $x \geq a$.

Le crochet est fermé en a.
Cela signifie que le nombre x peut être égal à a.

❖ **EXEMPLE**

$3 \in [2{,}1\ ;\ +\infty[$

$300 \in [2{,}1\ ;\ +\infty[$

$2{,}1 \in [2{,}1\ ;\ +\infty[$ car le crochet est fermé en $2{,}1$

$0 \notin [2{,}1\ ;\ +\infty[$

Dire qu'un nombre réel x est strictement supérieur au réel a peut s'écrire : $x \in]a\ ;\ +\infty[$ ou $x > a$.

Le crochet est ouvert en a.
Cela signifie que le nombre x ne peut être égal à a.

❖ **EXEMPLE**

$0 \in]-12\ ;\ +\infty[$

$243 \in]-12\ ;\ +\infty[$

$-12 \notin]-12\ ;\ +\infty[$ car le crochet est ouvert en -12

Concernant les ensembles de nombres inférieurs à un nombre réel donné, nous utiliserons la notation $-\infty$.

Considérons un nombre réel b.

Dire qu'un nombre réel x est inférieur ou égal au réel b peut s'écrire : $x \in]-\infty\ ;\ b]$ ou $x \leq b$.

Le crochet est fermé en b.
Cela signifie que le nombre x peut être égal à b.

❖ **EXEMPLE**

$-100 \in]-\infty\ ;\ 2]$

$-1 \in]-\infty\ ;\ 2]$