1 Limites

GÉNÉRALITÉS

Définitions

Dans les énoncés suivants, L et a sont deux réels.

• f étant définie sur un intervalle de borne $+\infty$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand.
On écrit encore : $\lim\limits_{+\infty} f = L$.

• f étant définie sur un intervalle de borne $-\infty$,
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs f(x) pour x assez petit (pour x assez « grandement négatif », si on préfère !).
On écrit encore : $\lim\limits_{-\infty} f = L$.

• f étant définie sur un intervalle de borne $+\infty$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]A, +\infty[$, A étant un réel positif arbitrairement choisi, contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand.

• On définit de façon analogue les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• **Vu en 1re S dans le cadre de la définition d'un nombre dérivé**
f étant définie sur un intervalle I contenant a sauf peut-être en a,
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs f(x) pour x assez voisin de a dans I. On écrit encore : $\lim\limits_{a} f = L$.

Remarque :
a étant un réel, b étant un réel ou bien $+\infty$ ou bien encore $-\infty$,
démontrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ revient à démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = b$.

Premières limites de référence

Dans ce qui suit, n est un entier naturel non nul, a est un réel.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limites ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Limites utiles notamment pour la recherche de nombres dérivés et recherche de droite asymptote à la courbe de f.

• Avec $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$; $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$;

$\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$; $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$.

• $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2n}} = +\infty$.

THÉORÈMES

Théorèmes de comparaisons

Dans ce qui suit, a est un réel ou bien $-\infty$ ou bien $+\infty$, L est un réel.

• **Si** pour x « assez voisin » de a, $|f(x) - L| \leq g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

• **Théorème dit « des gendarmes »**

Si pour x « voisin » de a, $g(x) \leq f(x) \leq G(x)$ avec :

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} G(x) = L$,

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

• **Si** pour x « voisin » de a, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$,

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

• **Si** pour x « voisin » de a, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

Limites de sommes, produits, quotients et composées

Dans ce qui suit, a est un réel ou bien $-\infty$ ou bien $+\infty$, L et L' sont deux réels.

• Somme

Principe de lecture du tableau suivant et principe de raisonnement :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L'$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = L + L'$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Présentation conseillée :

Sachant que $f(x) = u(x) + v(x)$,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} u(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Le symbole « $\Rightarrow$ » se lit « implique ».

• Produit

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	L L > 0	L L < 0	L L > 0	L L < 0	$+\infty$	$+\infty$	0
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x) =$	L × L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

• Quotient

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	0	$+\infty$	$+\infty$	L	$\pm\infty$
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	L' L' > 0	L' L' < 0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{L}{L'}$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	0	**?**

• **Composée**

a, b et c sont trois éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$$

Corollaire (théorème déduit des précédents)

Si f est une fonction rationnelle ou trigonométrique ou si f est la fonction racine carrée ou si f est la composée de fonctions précitées, alors la limite de f en tout réel a de son ensemble de définition est f(a).

Remarque :

Pour tout dire, apprendre les résultats des tableaux précédents n'est pas judicieux !

Faites fonctionner votre bon sens et finalement retenir les quatre formes indéterminées que vous devrez régler :

« $+\infty + (-\infty)$ », « $0 \times \pm\infty$ », « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ », « $\dfrac{0}{0}$ ».

Techniques courantes pour lever les indéterminations

✓ *Lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ et que la forme indéterminée est*

« $+\infty + (-\infty)$ » ou « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ».

• **Méthode 1**

Si la fonction est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes), **alors** la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) de f(x) est égale à celle en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du rapport de ses monômes de plus hauts degrés. On réduit le quotient obtenu et on peut alors se déterminer !

Cette règle s'applique évidemment aux fonctions polynômes.

• **Méthode 2**

Repérer les parties provoquant l'indétermination et factoriser chacun des membres en présence par son terme dominant. Une réduction d'écriture peut lever l'indétermination.

• **Méthode 3**

Si l'expression contient une racine carrée, alors la neutraliser à l'aide du produit remarquable $a^2 - b^2$. C'est la technique dite de « l'expression conjuguée ».

✓ *Contexte de recherche de nombre dérivé ou calcul semblable :*

Lorsque x tend vers a, a réel, et que la forme indéterminée est « $\dfrac{0}{0}$ ».

• **Méthode 4**

Si la fonction est rationnelle, factoriser les polynômes numérateur et dénominateur par (x – a) et réduire le quotient. Méthode 3, si présence de racines carrées.

• **Méthode 5**
Utiliser le cours sur la dérivation.

Si le quotient peut s'écrire sous la forme $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ où la fonction g est dérivable en a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$.

Il suffira alors de dériver la fonction g suivant les principes de dérivation et de calculer g'(a).

Sinon, ruser sur l'écriture de f(x) pour en faire sortir de force une expression du type $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ où la fonction g est dérivable en a, voire plusieurs quotients de ce type.

✓ *Une méthode générale qui sera de plus en plus utilisée au cours de l'année :*

• **Méthode 6**
Utiliser les limites de référence du cours grâce à des modifications d'écritures de l'expression de f(x).

LIMITES À GAUCHE, À DROITE EN UN RÉEL a

Ces limites ont un intérêt très particulièrement dans les deux situations suivantes :

• f est un quotient $\frac{N}{D}$ où $\lim\limits_{x\to a} D(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} N(x) \neq 0$ et D(x) change de signe de part et d'autre de a.

• f est définie par des formules différentes à gauche et à droite de a ;

⭘ Pour les **définitions** de ces limites, il suffit de reprendre les définitions des limites de f(x) lorsque x tend vers a, mais cette fois en y ajoutant que x est strictement inférieur ou strictement supérieur à a.

Exemples :

• $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle]A, +∞[, A > 0, contient toutes les valeurs f(x) pour x assez voisin de a par valeurs supérieures strictement.

Notations usuelles : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.

• $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs f(x) pour x assez voisin de a par valeurs inférieures strictement.

résumés de cours
exercices
contrôles
corrigés

Limites de référence

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ASYMPTOTES À C_f

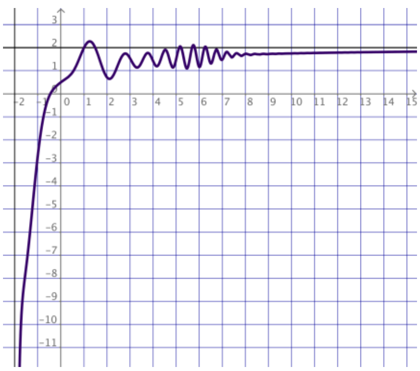
Droites asymptotes parallèles aux axes du repère

Dans ce paragraphe, il s'agit d'examiner le comportement des images f(x) aux bornes de l'ensemble de définition, c'est-à-dire lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou encore lorsque x tend vers une « valeur interdite » par f.
Cela permet donc, notamment, de visualiser l'allure de la courbe sur ses branches infinies.

• **Si** $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, **alors** la droite d'équation x = a est asymptote « verticale » à C_f.

• **Si** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, **alors** la droite d'équation y = b est asymptote « horizontale » à C_f au voisinage de $-\infty$.

• **Si** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, **alors** la droite d'équation y = b est asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.



La courbe C représentative de f dans le repère proposé ci-contre possède deux droites asymptotes parallèles aux axes du repère.
Ce sont les droites d'équations :

$$x = -2 \quad \text{et} \quad y = 2.$$

En effet :

$$\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

Concrètement,

• rechercher une asymptote « horizontale » est extrêmement simple : il suffit de vérifier que la limite de f(x) soit en $+\infty$ soit en $-\infty$ est une limite finie ;

• rechercher une asymptote « verticale » est aussi extrêmement simple : il suffit de vérifier que la limite de f(x) lorsque x tend vers un nombre a (presque toujours en une valeur interdite) est une limite infinie.

✱✱ Exercice 1 — 1 h

Examiner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans chacune des situations suivantes :

1. $f(x)=3x^2+5x-7$

2. $f(x)=-2x^3+7x-9$

3. $f(x)=(2x^5-x+1)(3x^{11}-2x^7+3x^5-x^4+x^3+x^2+1)$

4. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+1}{x^2-x+1}$

5. $f(x)=\dfrac{5x^2+x-3}{x+2}$

6. $f(x)=\dfrac{7x+1}{x^4+1}$

7. $f(x)=\dfrac{2x\sqrt{x}+1}{x^2+1}$

8. $f(x)=x^2+\sin x$

9. $f(x)=-x^3+\cos(x^2)$

10. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

11. $f(x)=\dfrac{2x^2-x\cos x+1}{x^2+2}$

12. $f(x)=\sqrt{2x+1}-x^2$

13. $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$

14. $f(x)=\sqrt{9x^2+x+2}-3x+1$

15. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

✱✱ Exercice 2 — 25 min

Examiner $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ dans chacune des situations suivantes :

1. $f(x)=3x^2-4x+1$

2. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$

3. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{-x^2+3x-2}$

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}$

6. $f(x)=\dfrac{\sin(2x-2)}{x-1}$

résumés de cours
exercices
contrôles
corrigés

✱✱ Exercice 3 — 40 min

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, D_f, dans chacune des situations suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$ **2.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}$

3. $f(x)=\dfrac{4x^3+2}{-2x^2+3x+5}$ **4.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

5. $f(x)=2x+\sin(3x)$ **6.** $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{(x-2)(x^2-3x+2)}$

✱✱ Exercice 4 — 25 min

Examen des asymptotes éventuelles à la courbe C (représentative de f) parallèles aux axes du repère dans chacune des situations suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$ **2.** $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{-x^2+4x-3}$

3. $f(x)=-1+\dfrac{3}{x-2}$ **4.** $f(x)=-5x+1-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x^2+1}$

✱✱✱ Exercice 5 — 17 min

Poussons un peu le regard :

Si on peut écrire f(x) sous la forme f(x) = ax + b + φ(x) avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$,

alors la droite d'équation y = ax + b est asymptote à C_f au voisinage de +∞.

On imagine aisément un énoncé analogue pour x *tendant vers* –∞.

Ceci signifie que pour x très très grand, f(x) et d(x) = ax + b ne se distinguent quasiment pas ; soit encore que la courbe de f prend l'allure de la droite D d'équation y = ax + b.

En pratique, ou bien l'écriture est celle qui est exposée dans l'énoncé, ou bien si dans la question posée, l'asymptote oblique est donnée par son équation $y=ax+b$, il suffit alors de prouver que $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$

ou bien $\lim\limits_{x \to +\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$.