■ 1 ■
PGCD de deux entiers

NOMBRES ENTIERS

On appelle *nombres entiers naturels* les nombres : 0, 1, 2, 3, …18, … 105,…
On appelle *nombres entiers relatifs* les nombres entiers naturels et leurs opposés : …–18, … –2, –1, 0, 1, 2, …18, …

NOMBRES PREMIERS

On appelle *nombres premiers* les entiers naturels qui ont exactement deux diviseurs.
Les nombres premiers compris entre 1 et 50 sont entourés dans le tableau ci-dessous :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

PGCD DE DEUX ENTIERS

● Pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels, on décompose les deux entiers en un produit de facteurs premiers. Le plus grand commun diviseur, *noté PGCD,* des deux nombres est égal au produit des facteurs communs figurant dans la décomposition trouvée, chaque facteur commun étant affecté de la puissance la plus petite.
$42 = 2 \times 3 \times 7$ et $12 = 2^2 \times 3$ alors PGCD(42 , 12) = $2 \times 3 = 6$.
Cette méthode est utilisée, uniquement dans le cas où le nombre étudié n'est pas trop grand et quand la décomposition des deux entiers est simple à obtenir.

● ***Algorithme d'Euclide***

Pour déterminer le PGCD de deux entiers a et b avec a > b, deux cas se présentent :
- Si a est divisible par b, PGCD(a , b) = b.

- Si a n'est pas divisible par b, on commence par diviser a par b ; puis on divise b par le reste r obtenu dans la division précédente ; puis ce reste r par le nouveau reste r' ; ainsi de suite jusqu'au dernier reste non nul qui sera alors le PGCD cherché.

Exemple : PGCD(21 , 12). Ces divisions s'écrivent :

$$\begin{array}{r|l} 21 & 12 \\ \hline 9 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 9 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

$21 = 12 \times 1 + 9$ $\quad 12 = 9 \times 1 + 3$ $\quad 9 = 3 \times 3 + 0.$

Le dernier reste non nul est 3 : PGCD(21 , 12) = 3.

● ***Algorithme de la différence***

Soit deux entiers naturels non nuls a et b tels que a > b et a non divisible par b :
PGCD(a , b) = PGCD(a , a – b) = PGCD(b , a – b).
On obtient ainsi le PGCD de deux nombres par une troisième méthode :
A partir de la deuxième ligne de calcul, on inscrit successivement dans le tableau le plus petit des deux nombres a et b et la différence a – b obtenue précédemment jusqu'au moment où l'on arrive à une différence nulle.
Les nombres égaux dans la même ligne donnent le PGCD cherché.
Cette recherche peut être longue, elle sera alors à éviter.
On détermine, ci-dessous, par cette méthode, le PGCD de 21 et 12 :

a	b	a – b
21	12	9
12	9	3
9	3	6
6	3	3
3	3	0

NOMBRES ENTIERS PREMIERS ENTRE EUX

On dit que deux entiers, non nuls, a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Dans ce cas les fractions $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$ ne peuvent être simplifiées, on dit que les fractions sont irréductibles.

◣ Enoncés des exercices ◢

■ Exercice 1 .... (15 min)

Ecrire les nombres suivants sous forme d'un produit de nombres premiers.
A = 24 ; B = 45 ; C = 98 ; D = 100 ; E = 138 ; F = 147.

■ Exercice 2 .... (30 min)

1. Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers :

81 ; 98 ; 140 ; 153.

2. Déterminer le PGCD de 81 et 153 puis celui de 98 et 140.
3. Utiliser ce qui précède pour simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{81}{153}\ ;\ \frac{98}{140}.$$

■ Exercice 3 .... (10 min)

Les nombres 133 et 185 sont-ils premiers entre eux ? Justifier la réponse.

■ Exercice 4 .... (45 min)

1. Calculer, à l'aide de plusieurs méthodes possibles, le PGCD des nombres a et b suivants :
a = 406 et b = 696.
a = 462 et b = 264.
a = 1 540 et b = 693.
a = 4 435 et b = 6 209.

2. Ecrire, dans chacun des cas précédents, les quotients $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible.

■ Exercice 5 .... (15 min)

Un pâtissier dispose de 411 framboises et de 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.
1. Calculer le nombre de tartelettes.

2. Calculer le nombre de framboises et de fraises contenues dans chaque tartelette.

■ Exercice 6 .... (20 min)

1. 288 et 224 sont-ils premiers entre eux ? Expliquer pourquoi.
2. Déterminer le PGCD de 288 et 224.
3. Ecrire la fraction $\frac{224}{288}$ sous forme irréductible.
4. Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysages et le même nombre de portraits.
Il dispose de 224 photos de paysage et de 288 portraits.
Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes les photos ?
Combien chaque panneau contient-il de photos de paysages et de portraits ?

■ Exercice 7 .... (10 min)

Pour le 1er Mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.
Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.
1. Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?
2. Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

■ Exercice 8 .... (20 min)

1.
a) Déterminer, en détaillant les différentes étapes de la méthode choisie, le PGCD des nombres 408 et 578.
b) Ecrire la fraction $\frac{408}{578}$ sous forme irréductible.

2. Dans un collège, les élèves se décomposent en 408 garçons et 578 filles. On veut former des équipes mixtes de telle façon qu'il y ait le même nombre de garçons dans chaque équipe et le même nombre de filles dans chaque équipe. On veut aussi que tous les élèves soient dans une équipe.
a) Quel est le nombre maximal d'équipes pouvant être formées ?
b) Donner alors la composition de chaque équipe.

.... ■ CONTROLE (1 h 30 min) ■ ....

Exercice 1 *(2/20)*

Les entiers 342 et 385 sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 2 *(6/20)*

Calculer, par trois méthodes différentes dans les deux premiers cas et par deux méthodes dans le dernier cas, le PGCD des entiers naturels a et b suivants :

1. a = 56 et b = 64 ;
2. a = 312 et b = 252 ;
3. a = 630 et b = 3 675.

Exercice 3 *(4/20)*

On considère l'expression $A = \dfrac{9\,009}{10\,395} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{2}$.

1.
a) Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide, le PGCD de 9 009 et 10 395.
b) En déduire l'écriture simplifiée de $\dfrac{9\,009}{10\,395}$.

2. Calculer A en donnant le détail des calculs ; on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 4 *(4/20)*

1. Déterminer le PGCD des nombres 210 et 135.
2. Sophie veut faire une couverture en patchwork en cousant ensemble des carrés de tissu de grandeurs identiques mais de motifs différents. Les dimensions de la couverture doivent être de 210 cm sur 135 cm. Sachant qu'elle veut utiliser le moins de carrés possibles, quelle doit être leur dimension ? (Expliquer la démarche)
3. Combien devra-t-elle utiliser de carrés ?

Exercice 5 (*4/20)*

1. Montrer que le PGCD des nombres 372 et 775 est égal à 31 ; écrire les calculs.
2. Un chef d'orchestre fait répéter 372 choristes hommes et 775 choristes femmes pour un concert. Il veut faire des groupes de répétition de sorte que :
– le nombre de choristes femmes est le même dans chaque groupe ;
– le nombre de choristes hommes est le même dans chaque groupe ;
– chaque choriste appartient à un groupe.
a) Quel nombre maximal de groupes pourra-t-il faire ?
b) Combien y aura-t-il alors de choristes hommes et de choristes femmes dans chaque groupe ?

◤ Corrigés des exercices ◥

Corrigé 1 ....

On utilise les règles de divisibilité vues dans les classes antérieures, en choisissant dans l'ordre, les nombres premiers donnés dans le tableau de la première page du rappel de cours.

24 est divisible par 2 : $24 = 2 \times 12$.

De nouveau 12 est divisible par 2 : $24 = 2 \times 2 \times 6$.

On recommence : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$.

$$\mathbf{A = 2^3 \times 3.}$$

45 est divisible par 3 et par 5 :
$45 = 3 \times 15$ puis $45 = 3 \times 3 \times 5$.

$$\mathbf{B = 3^2 \times 5.}$$

98 est divisible par 2 : $98 = 2 \times 49$. 49 est le carré de 7.

$$\mathbf{C = 2 \times 7^2.}$$

100 est divisible par 2 et 5 : $100 = 2 \times 50 = 2 \times 2 \times 25 = 2 \times 2 \times 5^2$.

$$\mathbf{D = 2^2 \times 5^2.}$$

138 est divisible par 2 et par 3 :
$138 = 2 \times 69 = 2 \times 3 \times 23$.
23 est un nombre premier.

$$\mathbf{E = 2 \times 3 \times 23.}$$

441 est divisible par 3 : $441 = 3 \times 147 = 3 \times 3 \times 49 = 3 \times 3 \times 7^2$.

$$\mathbf{F = 3^2 \times 7^2.}$$

Corrigé 2 ....

1. $81 = 9^2 = \left(3^2\right)^2 = 3^4$; $98 = 2 \times 49 = 2 \times 7^2$;
$140 = 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7$; $153 = 3 \times 51 = 3 \times 3 \times 17 = 3^2 \times 17$.

$$\boxed{81 = 3^4 \text{ ; } 98 = 2 \times 7^2 \text{ ; } 140 = 2^2 \times 5 \times 7 \text{ ; } 153 = 3^2 \times 17}$$

Pour faciliter la recherche de ces facteurs premiers, on peut présenter les calculs comme ci-dessous : la première colonne donne les quotients successifs dans la division par les différents nombres premiers indiqués dans la seconde colonne.

Exemple : décomposition de 140.
On utilise les nombres premiers dans l'ordre avec épuisement de chacun avant de passer au suivant.
On retrouve le résultat précédent.

$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

2. En utilisant les nombres premiers obtenus à la question précédente, on choisit les facteurs premiers communs affectés des plus petites puissances :
81 et 153 n'ont que le facteur premier 3 en commun et la plus petite puissance observée est 2 : PGCD(81 , 153) = $3^2 = 9$.
98 et 140 ont 2 et 7 pour facteurs premiers communs, les plus petites puissances respectives sont 1et 1 : PGCD(98 , 140) = $2^1 \times 7^1 = 14$.

PGCD(81 , 153) = 9 ; PGCD(98 , 140) = 14.

3. On utilise les PGCD obtenus :

$$\frac{81}{153} = \frac{9\times9}{9\times17} = \frac{9}{17} \text{ et } \frac{98}{140} = \frac{14\times7}{14\times10} = \frac{7}{10}.$$

$$\frac{81}{153} = \frac{9}{17} \ ; \ \frac{98}{140} = \frac{7}{10}$$

Corrigé 3 ....

Première méthode

On peut utiliser la décomposition des deux entiers 133 et 185 en un produit de facteurs premiers pour déterminer leur PGCD.

$133 = 7 \times 19$ et $185 = 5 \times 37$.

Les deux nombres n'ont aucun facteur premier en commun : leur PGCD est égal à 1.

Les nombres 133 et 185 sont premiers entre eux.

Deuxième méthode

L'algorithme d'Euclide se traduit par les divisions successives :

$$\begin{array}{r|l} 185 & 133 \\ \hline 52 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 133 & 52 \\ \hline 29 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 52 & 29 \\ \hline 23 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 29 & 23 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ \hline 5 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

On constate que cette méthode est longue.

Pour appliquer l'algorithme de la différence, on dresse le tableau suivant :

a	b	a – b
185	133	52
133	52	81
81	52	29
52	29	23
29	23	6
23	6	17
17	6	11
11	6	5
6	5	1
5	1	4
4	1	3
3	1	2
2	1	1
1	**1**	0

Cette dernière méthode est ici est encore plus longue et sera donc à éviter, elle a toutefois été exposée à titre d'entraînement.

Corrigé 4 ....

1. Recherche du PGCD de 406 et 696.

La décomposition des nombres 406 et 696 en facteurs premiers est :

406	2
203	7
29	29
1	

696	2
348	2
174	2
87	3
29	29
1	

$406 = 2 \times 7 \times 29$; celle de 696 est $696 = 2^3 \times 3 \times 29$.

Les facteurs premiers communs sont 2 et 29 et la plus petite puissance dans chaque cas est 1 :

PGCD(406 , 696) = 2 × 29 = 58.

L'algorithme d'Euclide se traduit par les divisions successives :

Dividende	Diviseur	Reste	Quotient
696	406	290	1
406	290	116	1
290	116	58	2
116	58	0	2

58 est le dernier reste non nul, c'est le PGCD cherché.

Pour appliquer l'algorithme de la différence, on dresse le tableau suivant :

a	b	a – b
696	406	290
406	290	116
290	116	174
174	116	58
116	58	58
58	**58**	0

Visiblement on obtient encore 58 pour PGCD de 406 et 696.

Recherche du PGCD de 462 et 264.

On recommence ces trois méthodes pour cette question :

Décomposition en facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$; $264 = 2^3 \times 3 \times 11$.

Les facteurs premiers communs aux deux nombres sont 2, 3 et 11. La plus petite puissance à chaque fois est 1 :

PGCD(462 , 264) = 2 × 3 × 11 = 66.

Algorithme d'Euclide

$$\begin{array}{r|l} 462 & 264 \\ \hline 198 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 264 & 198 \\ \hline 66 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 198 & 66 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Le dernier reste non nul est 66 qui est bien le PGCD trouvé précédemment.

Algorithme de la différence

a	b	a – b
462	264	198
264	198	66
198	66	132
132	66	66
66	**66**	0

On trouve bien 66 pour PGCD cherché.

Recherche du PGCD de 1 540 et 693.

Décomposition en facteurs premiers : à éviter ici, 1 540 étant trop grand.

Algorithme d'Euclide

$$\begin{array}{r|l} 1\,540 & 693 \\ \hline 154 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 693 & 154 \\ \hline 77 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 154 & 77 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Le dernier reste non nul est 77 :

PGCD(1 540 , 693) = 77.

Algorithme de la différence

a	b	a – b
1 540	693	847
847	693	154
693	154	539
539	154	385
385	154	231
231	154	77
154	77	77
77	**77**	0

On retrouve 77 pour PGCD mais les calculs deviennent longs et on remarque que l'algorithme d'Euclide est le plus simple à appliquer.

Recherche du PGCD de 4 435 et 6 209.

Décomposition en facteurs premiers : de nouveau les calculs sont trop longs et cette méthode est à déconseiller.

Algorithme d'Euclide

$$\begin{array}{r|l} 6\,209 & 4\,435 \\ \hline 1\,774 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\,435 & 1\,774 \\ \hline 887 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,774 & 887 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Le dernier reste non nul est 887 :

PGCD(4 435 , 6 209) = 887.

Algorithme de la différence

a	b	a – b
6 209	4 435	1 774
4 435	1 774	2 661
2 661	1 774	887
1 774	887	887
887	**887**	0

On retrouve 887, le PGCD obtenu avec la méthode précédente.

2. On utilise, à chaque fois, le PGCD obtenu pour mettre en évidence le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fraction :

$$\frac{a}{b} = \frac{406}{696} = \frac{58\times7}{58\times12} = \frac{7}{12}.$$

$$\frac{406}{696} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{462}{264} = \frac{66\times7}{66\times4} = \frac{7}{4}.$$

$$\frac{462}{264}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{1\,540}{693}=\frac{77\times 20}{77\times 9}=\frac{20}{9}\,.$$

$$\frac{1\,540}{693}=\frac{20}{9}$$

$$\frac{4\,435}{6\,209}=\frac{887\times 5}{887\times 7}=\frac{5}{7}\,.$$

$$\frac{4\,435}{6\,209}=\frac{5}{7}$$

Corrigé 5 ....

1. Le pâtissier veut préparer le maximum de tartelettes et ne laisser aucun fruit de côté. Le nombre de tartelettes sera donc le plus grand diviseur commun aux nombres de fraises et de framboises soit le PGCD de 411 et 685.
On applique l'algorithme d'Euclide en effectuant les divisions successives suivantes :

$$\begin{array}{r|l} 685 & 411 \\ \hline 274 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 411 & 274 \\ \hline 137 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 274 & 137 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Le dernier reste non nul est 137.

Le pâtissier doit préparer 137 tartelettes.

2. Il y a 411 framboises et 685 fraises à répartir dans 137 tartelettes, il y aura alors 411 : 137 = 3 soit 3 framboises par tartelettes et 685 : 137 = 5 soit 5 fraises par tartelettes.

Chaque tartelette doit contenir 3 framboises et 5 fraises.

Corrigé 6 ....

1. On remarque que les deux nombres 288 et 224 sont pairs, ils sont donc divisibles par 2 et le PGCD de 288 et 224 ne peut être égal à 1.
Deux nombres sont premiers entre si et seulement si leur PGCD est égal à 1, ce qui n'est pas le cas ici.

288 et 224 ne sont pas premiers entre eux.

2. Déterminons, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le PGCD de 288 et 224.

$$\begin{array}{r|l} 288 & 224 \\ \hline 64 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 224 & 64 \\ \hline 32 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & 32 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Le dernier reste non nul de cette succession de divisions est 32 :

PGCD(288 , 224) = 32.

3. On utilise le PGCD trouvé pour mettre en évidence un facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fraction à simplifier.

$\frac{224}{288}=\frac{32\times7}{32\times9}=\frac{7}{9}$.

$$\frac{224}{288}=\frac{7}{9}$$

4. Le photographe veut réaliser le maximum de panneaux et ne laisser de côté aucune photo ; le nombre de panneaux sera alors le plus grand diviseur commun aux 288 portraits et aux 224 photos de paysages.

Le photographe pourra faire au maximum 32 panneaux.

Dans la troisième question on a écrit $224 = 32 \times 7$ et $288 = 32 \times 9$:

Chaque panneau comportera 7 photos de paysages et 9 portraits

Corrigé 7 ....

1. Julie veut composer le maximum de bouquets avec ses 182 brins de muguet et ses 78 roses sans laisser de fleurs de côté, sachant que chaque bouquet a la même composition. Elle calculera donc le plus grand diviseur commun aux deux nombres 182 et 78.
On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{r|l} 182 & 78 \\ \hline 26 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 78 & 26 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

On en déduit que le PGCD de 182 et 78 est 26.

Julie composera 26 bouquets.

2. On remarque que $182 = 26 \times 7$ et $78 = 26 \times 3$:

chaque bouquet aura 7 brins de muguet et 3 roses.

Corrigé 8 ....

1. a) Recherche du PGCD de 408 et 578.

Première méthode : décomposition en facteurs premiers

En utilisant les décompositions de la page suivante :
On peut écrire :

$408 = 2^3 \times 3 \times 17$ et $578 = 2 \times 17^2$.