Chapitre 1

LES NOMBRES COMPLEXES

Rappels de cours ....

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Forme algébrique d'un complexe

La forme algébrique d'un nombre complexe z s'écrit $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i vérifie $i^2 = -1$.

x est la partie réelle du complexe z, $\Re e(z) = x$ et y sa partie imaginaire, $\Im m(z) = y$.

Dans un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

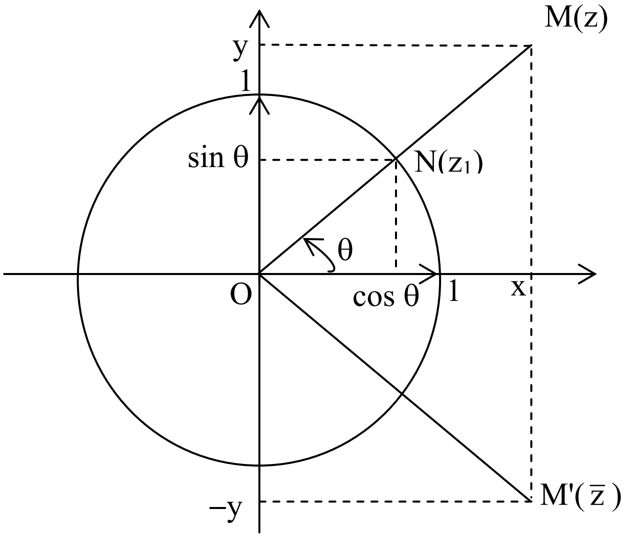
- le point M a pour coordonnées (x ; y) ;
- le point M a pour affixe $z = x + i\,y$;
- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z = x + i\,y$.

On appelle module du complexe z, le nombre réel positif noté $|\,z\,|$ égal à :

$$|\,z\,| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Le conjugué du nombre complexe z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ égal à :

$$\bar{z} = x - i\,y.$$



On appelle argument du complexe non nul z, affixe du point M, l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. *Le complexe nul n'admet pas d'argument.*

Forme trigonométrique, forme exponentielle

Si N est un point du cercle trigonométrique de centre O tel que l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{ON}\right) = \theta$, l'affixe z_1 de N est $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ et son module est : $|z_1| = ON = 1$.

Soit z l'affixe non nulle du point M tel que $\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right) = \theta$, si on appelle r le module de z, $|z| = r$:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(forme trigonométrique)}$$

$$z = r\,e^{i\theta} \quad \text{(forme exponentielle).}$$

Pour déterminer un argument du complexe non nul $z = x + iy$, on détermine d'abord le module r de z puis on calcule : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$.

Ces deux données permettent de trouver l'unique valeur de θ dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses $(O\ ;\vec{u})$ ce qui se traduit par :

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = re^{-i\theta}$$

$$|z| = |\bar{z}| \text{ et } \arg\bar{z} = -\arg z \text{ (à un multiple de } 2\pi \text{ près).}$$

Egalité de complexes

Un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont simultanément nulles.

Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire ou le même module et le même argument (à un multiple de 2π près) :

Soit $z_1 = x_1 + i\,y_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Propriétés des conjugués

$$z = x + i\,y = re^{i\theta}\ ;\ \bar{z} = x - i\,y = re^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})\ ;\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'\ ;\ \overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\text{Si } z \neq 0,\ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$z\,z' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = r\,r'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$|\,z\,z'\,| = |\,z\,|\,|\,z'\,| \text{ et si } z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0,\ \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$

$$\text{Si}\quad z \neq 0 \quad \text{et} \quad z' \neq 0,\quad \frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\text{Si } z' \neq 0,\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ si de plus } z \neq 0,\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$|\,z^n\,| = |\,z\,|^n \text{ et si } z \neq 0,\ \arg\left(z^n\right) = n \arg z\ \ [2\pi].$$

Equation du second degré à coefficients réels

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b\,,\,c) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les solutions réelles :

$$z' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$, les solutions sont les complexes conjugués :

$$z' = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\ \ ;\ \ z'' = \overline{z'} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Interprétation géométrique d'expressions complexes

Dans le repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, si les points A, B, C et D ont pour affixes respectives a, b, c et d :

$b - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, $|\,b - a\,| = AB$ et si $a \neq b$ et $c \neq d$,

$$\arg\ \frac{a-b}{c-d} = \left(\overrightarrow{DC}\,,\,\overrightarrow{BA}\right).$$

Ecriture complexe d'une transformation

Dans le repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' et l'application f qui au point M associe le point M'.

$z' = z + a$ où $a \in \mathbb{C}$ signifie que M' est l'image de M dans la translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe a.

$z' = e^{i\theta} z$ signifie que M' est l'image de M dans la rotation de centre O et d'angle θ.

EXERCICES

Exercice 1.1 (GE Métropole 2009) ....

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

b) Ecrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c) Placer le point A dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On appelle z_B l'affixe du point B.

a) Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b) Ecrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c) Placer le point B dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A\ e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b) Placer le point C dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

c) Ecrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

d) Etablir que $z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

e) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Corrigé 1.1 ....

1. a) $\left| z_A \right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Appelons α un argument de z_A :

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\left| z_A \right| = 2 \;;\; \arg z_A = \frac{\pi}{3}}$$

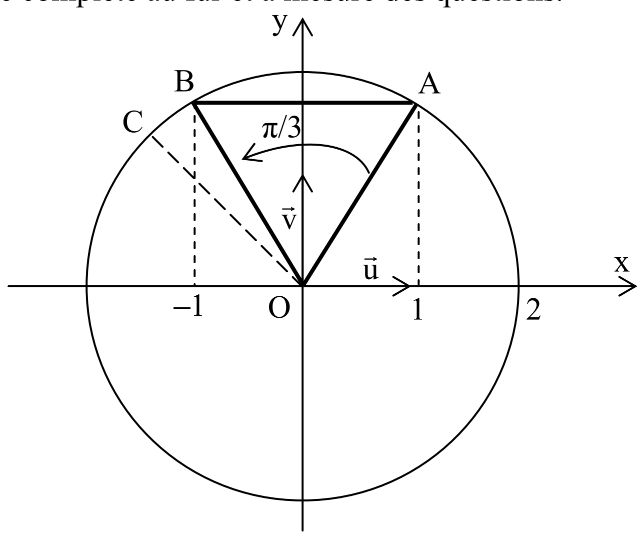
On aurait pu aussi, dans une autre méthode, écrire directement :

$z_A = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) Le résultat précédent permet d'écrire :

$$\boxed{z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

c) Le dessin a été complété au fur et à mesure des questions.



2. a) L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ qui transforme M(z) en M'(z') est $z' = e^{i\theta}z$;

on en déduit $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\boxed{z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

b) $z_B = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.

$$\boxed{z_B = -1 + i\sqrt{3}}$$

c) Voir la figure.

3. Les propriétés de la rotation permettent d'écrire :

OA = OB et $\left(\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ alors le triangle AOB est un triangle isocèle ayant un angle de 60°.

Le triangle AOB est équilatéral.

4. a) $z_C = z_A\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. On reconnaît l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Le point C est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b) Voir la figure.

c) On peut écrire $z_C = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Sous forme trigonométrique :

$$\boxed{z_C = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}$$

d) On utilise $z_C = z_A\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\boxed{z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$z_C = (1 + i\sqrt{3}) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La forme algébrique de z_C est :

$$\boxed{z_C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)}$$

e) On compare les deux écritures de z_C (algébrique et trigonométrique), en sachant que deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$2\cos\frac{7\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ et } 2\sin\frac{7\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

$$\boxed{\begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right) \\ \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right) \end{cases}}$$

Exercice 1.2 (GM Polynésie 2009) ....

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 1 cm).

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 24.$$

a) Vérifier que $P(3) = 0$.
b) Déterminer deux nombres réels α et β tels que :

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

c) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives :

$$a = 3,\ b = 2 + 2i \text{ et } c = 2 - 2i.$$

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe b.
c) Déterminer le module et un argument du nombre complexe c.
d) Montrer que le triangle OBC est rectangle et isocèle

3. On considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = \sqrt{5}$.

a) Montrer que les points B et C appartiennent à l'ensemble E.
b) Déterminer la nature de l'ensemble E et représenter cet ensemble sur le dessin.

Corrigé 1.2 ....

1. a) $P(3) = 3^3 - 7 \times 3^2 + 20 \times 3 - 24 = 27 - 63 + 60 - 24 = 87 - 87 = 0.$

$$\mathbf{P(3) = 0.}$$

b) *Remarque : le réel 3 est solution de P(z) = 0, on peut alors factoriser P(z) par (z – 3). P(z) pourra s'écrire, sous la forme :*

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta),\ \alpha \text{ et } \beta \text{ réels.}$$

On développant ce produit et par identification des coefficients, il vient :
$P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 3z^2 - 3\alpha z - 3\beta = z^3 + (\alpha - 3)z^2 + (\beta - 3\alpha)z - 3\beta.$

$$\begin{cases} \alpha - 3 = -7 \\ \beta - 3\alpha = 20 \\ -3\beta = -24 \end{cases}.$$

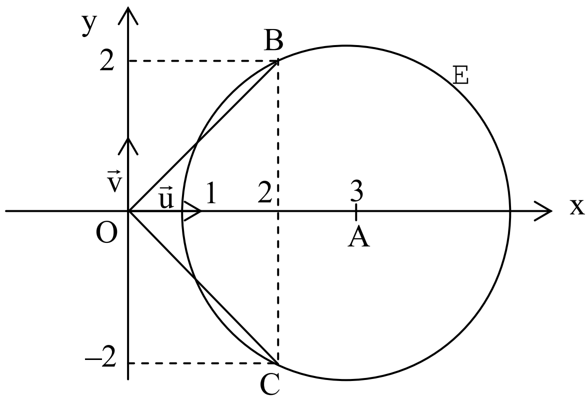
La première équation donne $\alpha = -4$ et la dernière $\beta = 8$. On vérifie que ces résultats sont compatibles avec la seconde équation : $8 + 12 = 20$.

$$\boldsymbol{\alpha = -4 \text{ et } \beta = 8.}$$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0$ ou $z^2 - 4z + 8 = 0$.
La première équation admet pour solution $z = 3$.
La seconde équation est du second degré. Elle admet pour discriminant :
$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$.
L'équation a pour solutions les deux complexes conjugués :
$z' = \dfrac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$ et $z'' = \overline{z'} = 2 - 2i$.

$$\boxed{P(z) = 0 \text{ a pour solutions } 3 \text{ ; } 2 + 2i \text{ et } 2 - 2i}$$

2. a)



b) $|b| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

On peut écrire $b = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ soit :

$b = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$\boxed{\text{Le module de b est } 2\sqrt{2} \text{ et un argument de b est } \frac{\pi}{4}}$$

c) Deux complexes conjugués ont le même module et des arguments opposés :

$$\boxed{\text{Le module de c est } 2\sqrt{2} \text{ et un argument de c est } -\frac{\pi}{4}}$$