1

ALGORITHMES, RAISONNEMENTS

🕮 Les notions indispensables

ALGORITHMES

L'instruction « Si…alors »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variable :	u	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 3	
Traitement :	Si $u < 4$ Affecter à u la valeur 2u	$u = 3$ est plus petit que 4, c'est vrai. Alors u devient : $2u = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow u = 6$
Sortie :	Afficher u	6 s'affiche.

L'instruction « Si…sinon »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variable :	u	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 5	
Traitement :	Si $u < 4$ u prend la valeur 2u Sinon, u prend la valeur $u + 7$	$u = 5$ est plus grand que 4. On rentre donc dans le « sinon ». $u = 5$ devient : $5 + 7 = 12 \Rightarrow u = 12$
Sortie :	Afficher u	12 s'affiche.

L'instruction « Pour i de 1 à n »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variables :	u, i	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 2	La première fois (i = 1), u devient 3u = 3 × 2 = 6 ⇒ u = 6.
Traitement :	Pour i de 1 à 3 (Répéter 3 fois) u prend la valeur 3u Fin Pour	La deuxième fois (i = 2), u devient 3u = 3 × 6 = 18 ⇒ u = 18. La troisième fois (i = 3), u devient 3u = 3 × 18 = 54 ⇒ u = 54.
Sortie :	Afficher u	54 s'affiche.

L'instruction « Tant que »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variable :	u	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 3	
Traitement :	Tant que u > 1 Affecter à u la valeur u ÷ 2 Fin Tant que	u = 3 > 1, c'est vrai u devient u ÷ 2 = 3 ÷ 2 = 1,5 ⟹ u = 1,5. u = 1,5 > 1, c'est vrai u devient u ÷ 2 = 1,5 ÷ 2 = 0,75 ⟹ u = 0,75. u = 0,75 n'est pas plus grand que 1 ⟹ la boucle des calculs s'arrête.
Sortie :	Afficher u	0,75 s'affiche.

LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Étapes du raisonnement	**Ce qu'il faut faire**	**Un exemple, à propos de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$**
	On veut montrer qu'une proposition : P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.	On veut montrer que la proposition : P_n : « $u_n \leq 2$ » est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.
Initialisation	On montre que P_0 est vraie.	P_0 : « $u_0 \leq 2$ » est vraie vu que $u_0 = 1 \leq 2$.
Hérédité	On montre que si P_k est vraie pour un entier naturel k, alors P_{k+1} est vraie aussi.	On suppose P_k vraie, c'est-à-dire que $u_k \leq 2$. Alors : $u_{k+1} = 1 + \frac{u_k}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2$. Donc $u_{k+1} \leq 2$, P_{k+1} est vraie.
Conclusion	Pour tout entier $n \geq 0$, P_n est vraie.	Pour tout entier $n \geq 0$, P_n : « $u_n \leq 2$ » est vraie.

Attention ! Il arrive que la récurrence commence à P_1, pas à P_0.

LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

En général	**Un exemple**
On veut montrer qu'une proposition P est fausse.	On veut montrer que la proposition P : « La somme de deux nombres, l'un entier, l'autre pas entier, est un nombre entier » est fausse.
On suppose que P est vraie. On dit : « Si c'était vrai » !	Si c'était vrai !
On suit un fil logique qui de la proposition P nous mène à une conséquence C.	entier $+$ pas entier $=$ entier $\Rightarrow$ pas entier $=$ entier $-$ entier $\Rightarrow$ pas entier $=$ entier
Cette conséquence C ne peut pas être ; elle est absurde.	C'est absurde, un pas entier ne peut pas être entier !
Donc la proposition P est fausse.	Donc la somme de deux nombres, l'un entier l'autre pas, n'est pas un entier.

LE CONTRE-EXEMPLE

La preuve d'une fausseté par contre-exemple

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse :

« Pour tout entier naturel n, $n-\dfrac{n^2}{2}\leq 0$ » ?

C'est faux puisque, pour $n=1$, $1-\dfrac{1^2}{2}=0,5$ est positif.

$n=1$ est un contre-exemple qui prouve la fausseté de la proposition.

Les annales

AMÉRIQUE DU SUD, NOVEMBRE 2016

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

Compléter l'algorithme suivant permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}$.

Variables :	n, a et b sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 0 b prend la valeur 0,5
Traitement :	Tant que $\|b - a\|$ ……… n prend la valeur ……… a prend la valeur ……… b prend la valeur ………. Fin Tant que
Sortie :	Afficher

ANTILLES-GUYANE, SEPTEMBRE 2016

Soit la suite (u_n) définie $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.
Compléter les quatre lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant.

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel K est un entier naturel

```
Initialisation :   Affecter 1 à K
                   Affecter 1 − ln((1+e)/2) à U
                   Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :       Tant que K < N
                   Affecter ………. à U
                   Affecter ……… .à K
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher U
```

MÉTROPOLE, SEPTEMBRE 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                      d prend la valeur d'un entier aléatoire quelconque
                   entre 1 et 6
                         Si d ≤ 2
                            alors a prend la valeur 1 − a
                            sinon Si d ≤ 4
                                 alors b prend la valeur 1 − b
                         Fin Si
                      Fin Si
                      s prend la valeur a + b
                   Fin pour
Sortie :           Afficher s
```

1. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1^er^ passage boucle Pour					
2^e^ passage boucle pour					
3^e^ passage boucle Pour					

2. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

Les corrigés

AMÉRIQUE DU SUD, NOVEMBRE 2016

Variables :	n, a et b sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 0 b prend la valeur 0,5
Traitement :	Tant que $\lvert b-a\rvert > 10^{-3}$ n prend la valeur $n+1$ a prend la valeur b b prend la valeur $\dfrac{1}{2-b}$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

ANTILLES-GUYANE, SEPTEMBRE 2016

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K Affecter $1-\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$ à U Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que $K < N$ Affecter $\dfrac{1-e^{-K}}{K}-U$ à U Affecter $K+1$ à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher U