ALGORITHMES, RAISONNEMENTS

🕮 Les notions indispensables

ALGORITHMES

L'instruction « Si…alors »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variable :	u	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 3	
Traitement :	Si u < 4 Affecter à u la valeur 2u	u = 3 est plus petit que 4, c'est vrai. Alors u devient : $2u = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow u = 6$
Sortie :	Afficher u	6 s'affiche.

L'instruction « Si…sinon »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variable :	u	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 5	
Traitement :	Si u < 4 u prend la valeur 2u Sinon, u prend la valeur u + 7	u = 5 est plus grand que 4. On rentre donc dans le « sinon ». u = 5 devient : $5 + 7 = 12 \Rightarrow u = 12$
Sortie :	Afficher u	12 s'affiche.

L'instruction « Pour i de 1 à n »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variables :	u, i	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 2	
Traitement :	Pour i de 1 à 3 (Répéter 3 fois) u prend la valeur 3u Fin Pour	La première fois (i = 1), u devient 3u = 3 × 2 = 6 ⇒ u = 6. La deuxième fois (i = 2), u devient 3u = 3 × 6 = 18 ⇒ u = 18. La troisième fois (i = 3), u devient 3u = 3 × 18 = 54 ⇒ u = 54.
Sortie :	Afficher u	54 s'affiche.

L'instruction « Tant que »

L'algorithme		Ce qui se passe
Variable :	u	
Initialisation :	Affecter à u la valeur 3	
Traitement :	Tant que u > 1 Affecter à u la valeur u ÷ 2 Fin Tant que	u = 3 > 1, c'est vrai u devient u ÷ 2 = 3 ÷ 2 = 1,5 ⟹ u = 1,5. u = 1,5 > 1, c'est vrai u devient u ÷ 2 = 1,5 ÷ 2 = 0,75 ⟹ u = 0,75. u = 0,75 n'est pas plus grand que 1 ⟹ la boucle des calculs s'arrête.
Sortie :	Afficher u	0,75 s'affiche.

LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Étapes du raisonnement	**Ce qu'il faut faire**	**Un exemple, à propos de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$**
	On veut montrer qu'une proposition : P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.	On veut montrer que la proposition : P_n : « $u_n \leq 2$ » est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.
Initialisation	On montre que P_0 est vraie.	P_0 : « $u_0 \leq 2$ » est vraie vu que $u_0 = 1 \leq 2$.
Hérédité	On montre que si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie aussi.	On suppose P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n \leq 2$. Alors : $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2.$ Donc $u_{n+1} \leq 2$, P_{n+1} est vraie.
Conclusion	Pour tout entier $n \geq 0$, P_n est vraie.	Pour tout entier $n \geq 0$, P_n : « $u_n \leq 2$ » est vraie.

Attention ! Il arrive que la récurrence commence à P_1, pas à P_0.

LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

En général	**Un exemple**
On veut montrer qu'une proposition P est fausse.	On veut montrer que la proposition P : « La somme de deux nombres, l'un entier, l'autre pas entier, est un nombre entier » est fausse.
On suppose que P est vraie. On dit : « Si c'était vrai » !	Si c'était vrai !
On suit un fil logique qui de la proposition P nous mène à une conséquence C.	entier + pas entier = entier $\Rightarrow$ pas entier = entier − entier $\Rightarrow$ pas entier = entier
Cette conséquence C ne peut pas être ; elle est absurde.	C'est absurde, un pas entier ne peut pas être entier !

Donc la proposition P est fausse.	Donc la somme de deux nombres, l'un entier l'autre pas, n'est pas un entier.

LE CONTRE-EXEMPLE

La preuve d'une fausseté par contre-exemple

Proposition : « Pour tout entier naturel n, $n-\frac{n^2}{2}\leq 0$ ».
C'est faux puisque, pour $n=1$, $1-\frac{1^2}{2}=0{,}5$ est positif.
$n=1$ est un contre-exemple qui prouve la fausseté de la proposition.

Les annales

POLYNESIE 2014

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	**Traitement :**	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n-1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie ces deux en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-après où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

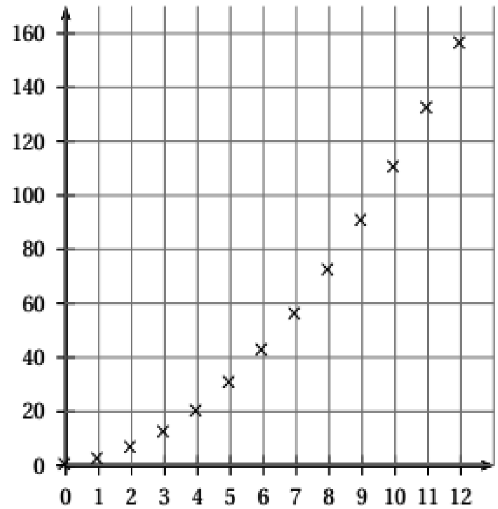
a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = an^2 + bn + c.$$

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



LIBAN 2014

On considère la suite géométrique (u_n) de raison $\sqrt{2}$, de premier terme 2. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

AMÉRIQUE DU NORD 2014

On considère la suite (a_n) définie par son premier terme $a_0 = 800$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur ……

Traitement	:	Tant que …….
		    Affecter à a la valeur ……….
		    Affecter à n la valeur $n+1$
		Fin Tant que

Sortie	:	Afficher n

PONDICHÉRY 2014

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n est un entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0{,}5$?

NOUVELLE-CALÉDONIE 2013

Variables	N est un entier U,V,W sont des réels K est un entier
Début	Affecter 0 à K Affecter 2 à U Affecter 10 à V Saisir N Tant que K < N Affecter K +1 à K Affecter U à W Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V Fin tant que Afficher U Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de cet algorithme :

K	W	U	V
0			
1			
2			

ANTILLES-GUYANE SEPTEMBRE 2013

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

- soit il avance d'un pas tout droit ;
- soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.