1. Suites géométriques, consorts

1. Les suites géométriques

Une suite (u_n) de nombres réels est géométrique si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant ; cette constante est la raison q de la suite (u_n).

◗ Question 1

Justifier que la suite $\left(u_n = \frac{3}{2^n}\right)$ est géométrique.

✍

◗ Question 2

Justifier que la suite $(u_n = 4^n + 1)$ n'est pas géométrique.

✍

Pour une suite géométrique (u_n) de raison q, on a, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ c'est-à-dire $u_{n+1} = qu_n$. Cette dernière formule définit la suite par récurrence, les termes de la suite sont calculés de proche en proche : $u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$.

◗ Question 3, résultat de cet algorithme ?

Variables : u est un nombre réel, n est un entier naturel
Initialisation : u prend la valeur 100
Traitement : Pour n de 1 à 4
u prend la valeur $0{,}2 \times u$
Fin Pour
Sortie : Afficher u

✍

◗ Question 4, affichages de cet algorithme ?

Variables : u est un nombre réel, n est un entier naturel
Initialisation : u prend la valeur 100
Traitement : Pour n de 1 à 4
u prend la valeur $0{,}2 \times u$
Afficher u
Fin Pour

✍

◗ Question 5, affichages ?

Variables : u est un nombre réel, n est un entier naturel
Initialisation : u prend la valeur 100
Traitement : Pour n de 1 à 4
Afficher u
u prend la valeur $0{,}2 \times u$
Fin Pour

✍

Expression de u_n en fonction de n

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} ..... \xrightarrow{\times q} u_n, \text{ donc } u_n = u_0 q^n.$$

Dans le cas particulier où le terme initial est u_1, et non u_0, il faut s'adapter :

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Question 6

Justifier que la suite $\left(u_n = 150 \times 0{,}1^{n+1}\right)$ est géométrique.
Que valent son terme initial u_0 et son quatrième terme ?

✍

Question 7

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

La suite (v_n) est définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ pour tout entier naturel n.

- Montrer que (v_n) est géométrique.
- Exprimer u_n en fonction de n.

✍

Question 8

Les deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$, et par les formules de récurrence :

$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$. On pose $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

✍

Les sommes partielles de la suite

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour une suite géométrique (u_n), $S_n = u_0 + u_0 q + ... + u_0 q^n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Question 9

Soit la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

✍

◗ Question 10, affichage ?

Variables : u et S sont des nombres réels
Initialisation : u prend la valeur 2
S prend la valeur 2
Traitement : Tant que $S < 100$
u prend la valeur $3 \times u$
S prend la valeur $S + u$
Fin tant que
Sortie : Afficher S

✍

Limite

Les termes d'une suite géométrique évoluent.

◗ Question 11, que pensez-vous de cet algorithme ?

Variables : u est un nombre réel, n est un entier naturel
Initialisation : u prend la valeur 1, n prend la valeur 0
Traitement : Tant que $u \leq 1$
u prend la valeur $0,9 \times u$
n prend la valeur $n+1$
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

✍

Que deviennent les termes de la suite (u_n) quand n devient grand, très grand, quand n tend vers $+\infty$? C'est la question de la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

◗ Question 12

Pour une suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 700$ et de raison $q = 0,3$, une calculatrice donne pour valeur de u_{100} la valeur 0. Que faut-il en penser ?

✍

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \text{ pour } q>1 \\ 0 \text{ pour } q\in\left]-1\ ;\ 1\right[\end{cases}.$$

En particulier une suite géométrique de raison $q\in\left]-1\ ;\ 1\right[$ converge vers 0, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 q^n = 0$.

◗ Question 13

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times 0,7^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{0,5^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 6\times 0,8^{n+1}$.

✍

◗ Question 14, résultat de cet algorithme ?

Variables : *u* est un nombre réel, *n* est un entier naturel
Initialisation : *u* prend la valeur 2, *n* prend la valeur 0
Traitement : Tant que $u>10^{-3}$
n prend la valeur $n+1$
u prend la valeur $0,6\times u$
Fin tant que
Sortie : Afficher n

✍

2. Le raisonnement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par récurrence par la donnée de son terme initial $u_0=5$ et par la formule de récurrence : $u_{n+1}=4u_n-15$ pour tout entier naturel *n*.
C'est amusant car $u_1=4u_0-15=4\times5-15=5$, $u_2=4u_1-15=5$, etc.
Démontrons cet « etcetera » en raisonnant par récurrence.
Montrons que la proposition P_n : « $u_n=5$ » est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

• D'abord *l'initialisation* : La proposition P_0 est vraie puisque $u_0=5$ (autrement dit : « au début ça marche »).

• Ensuite *l'hérédité* : Montrons que si P_k est vraie pour un entier naturel *k*, alors P_{k+1} est vraie aussi (autrement dit qu'il y a un effet « boule de neige »).

On sait que P_k est vraie, on sait aussi que $u_{k+1}=4u_k-15$.

$\begin{cases} P_k \text{ est vraie} \\ u_{k+1} = 4u_k - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_k = 5 \\ u_{k+1} = 4u_k - 15 \end{cases} \Rightarrow u_{k+1} = 4 \times 5 - 15 = 5$; P_{k+1} est vraie.

• C'est terminé, *conclusion* : $u_n = 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est constante.

◗ Question 15

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1 \end{cases}$.

Prouver, en raisonnant par récurrence que cette suite est constante.

✍

◗ Question 16, se souvenir des suites arithmétiques

La suite (u_n) est arithmétique, premier terme $u_0 = 2$, raison $r = 6$.

On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ pour tout entier naturel n.

Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 3n^2 + 5n + 2$.

✍

Le raisonnement par récurrence est particulièrement utile à l'étude des suites définies par récurrence.

◗ Question 17

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.

Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

✍

◗ Question 18

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 \end{cases}$.

Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5^{2^n}$.

✍