STATIQUE DES FLUIDES

I. Définition

On appelle fluide à l'échelle macroscopique, un milieu matériel continu qui est déformable (il épouse la forme du récipient qui le contient), sans forme propre et qui peut s'écouler. Dans les fluides, on distingue les gaz qui sont compressibles (la masse volumique varie en fonction de la pression) et les liquides qui sont très peu compressibles).

1. Fluide parfait

C'est un fluide totalement dépourvu de frottements internes. Il s'écoule sans frottement, avec une viscosité nulle.

2. Elément caractéristique d'un fluide

Masse volumique ρ

C'est la masse par unité de volume du corps considéré :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ρ s'exprime en $kg.m^{-3}$.
V volume en m^3.
m masse en kg.
La masse volumique est fonction de la température et de la pression.

Volumique massique v

C'est l'inverse de la masse volumique :

$$v = \frac{1}{\rho} \text{ en } m^3.kg^{-1}$$

Poids volumique ϖ

$$\varpi = \frac{mg}{V} = \rho.g \text{ en } N.m^{-3}$$

Densité d

C'est le rapport entre la masse volumique du corps considéré et la masse volumique du corps pris en référence dans les mêmes conditions de température et de pression.
La référence pour les liquides est l'eau prise à 4 °C et sous 1013 hPa. Pour les gaz c'est l'air (0 °C et 1013 hPa).

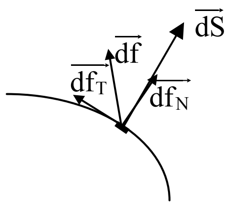
Liquides : $d = \frac{\rho}{\rho_0}$ Gaz : $d = \frac{M}{29}$

La densité n'a pas d'unité.

II. Pression

Un fluide est capable d'exercer une force sur un solide. De la force qu'exerce ce fluide sur une surface en résulte une pression.
La force exercée par le fluide sur un élément de surface dS peut se décomposer en :

- une composante tangentielle $\overrightarrow{df_T}$
- une composante normale $\overrightarrow{df_N}$.



En statique des fluides on ne s'intéresse qu'à la composante normale, la composante tangentielle n'intervenant que si le fluide est en mouvement.
Par définition la pression p s'exprime par :

$$\boxed{p = \frac{\left\|\overrightarrow{df_N}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dS}\right\|}}$$

p s'exprime en Pascal (Pa).
Plusieurs unités sont utilisées pour la pression :

- le bar : 1 bar $= 10^5$ Pa
- l'atmosphère : 1atm = 101325 Pa
- le millimètre de mercure : 760 mmHg = 101325 Pa
- le mètre de colonne d'eau : $1\text{mc}_{eau} = 9807$ Pa

et bien d'autres encore.
On définit aussi :

- la pression absolue (p_{abs}), pression par rapport au vide.
- la pression relative ou effective (p_{eff}), pression mesurée en référence à la pression atmosphérique :

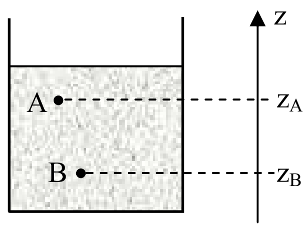
$$p_{eff} = p_{abs} - p_{atm}$$

III. Relation fondamentale de la statique des fluides

Un fluide est en équilibre dans le champ de pesanteur. Dans un repère $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ avec *l'axe des z orienté vers le haut*, cette relation s'écrit :

$$\boxed{dp = -\rho g dz}$$

Cette définition est valable uniquement pour les fluides incompressibles.
Différence de pression dans un fluide :
Pour déterminer la différence de pression entre le point A et le point B, on applique la relation précédente :



$$dp = -\rho g dz$$

En intégrant de A à B, en considérant ρ constant, il vient :

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = -\rho g \int_{z_A}^{z_B} dz$$

$$p_B - p_A = -\rho g(z_B - z_A) \text{ ; on pose } h = z_A - z_B$$

$$\boxed{p_B - p_A = \rho g h}$$

Attention, bien prendre l'axe des z orienté vers le haut.

Conséquences

Dans un fluide la pression augmente du haut vers le bas.

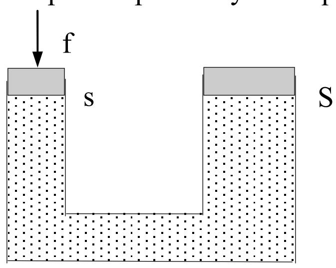
Les surfaces isobares sont des plans horizontaux.

Pour deux fluides non miscibles, la surface de séparation correspond à un plan horizontal.

Théorème de Pascal

Un liquide transmet intégralement et dans toutes les directions les variations de pression qu'on lui fait subir. Ceci est lié à l'incompressibilité qui implique une masse volumique constante.

Exemple : la presse hydraulique.



On exerce une force f sur le piston de surface s, la pression p = f/s est intégralement transmise au piston de surface S. En effet, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrivant $p_B - p_A = \rho g h$, si h est constant alors : $\Delta p_B = \Delta p_A$.

La force qui s'exerce alors sur S vaut :

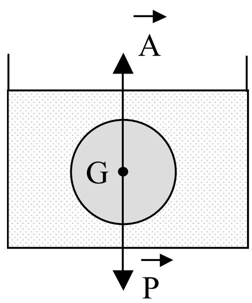
$$F = p \times S = f \times \frac{S}{s}.$$

Conclusion : si S est beaucoup plus grande que s, il sera possible de soulever des charges importantes, en appliquant une force f de faible valeur.

Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide au repos, subit de la part de ce fluide une poussée verticale dirigée du bas vers le haut. Cette poussée appliquée au centre de masse de ce volume est égale au poids du volume de fluide déplacé.

$$A = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{liquide déplacé}} \times g$$

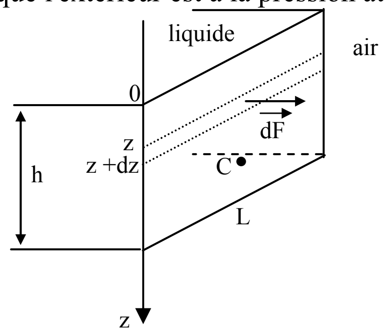


IV. Forces de pression

Pression sur une paroi plane

La paroi retient un liquide de masse volumique ρ sur une longueur L et une hauteur h.

On prend un élément de surface dS pris entre z et z + dz. A la cote z, tous les éléments de surface subissent la même pression p. La pression p est la pression relative puisque l'extérieur est à la pression atmosphérique.



$$dF = p.dS$$

$$p = \rho gz \text{ et } dS = L \times dz$$

$$F = \int_0^h \rho gLzdz$$

$$\boxed{F = \rho gL\frac{h^2}{2}}$$

Centre de poussée C

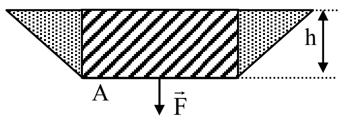
Le centre de poussée est le point d'application des forces de pression. La somme des moments de toutes les forces de pression par rapport à C doit être nulle. L'égalité des moments nous donne la cote :

$$\boxed{d = \frac{2}{3}h}$$

Résultante des forces sur le fond d'un récipient

On ne prend en compte que le poids du volume de liquide qui s'exerce sur le fond de surface A, d'où :

$$\boxed{F = \rho ghA}$$



Dynamique des fluides incompressibles

I. Définitions

Ecoulement permanent

L'écoulement d'un fluide incompressible parfait est dit permanent ou stationnaire, si les grandeurs (pression, température, vitesse, …) qui le caractérisent, vont rester constantes au cours du temps.

Débit

Soit une canalisation de section S. La quantité de fluide traversant cette section, pendant une certaine durée, permet d'exprimer le débit :

Débit massique

$$\boxed{q_m = \frac{dm}{dt} \text{ en kg.s}^{-1}}$$

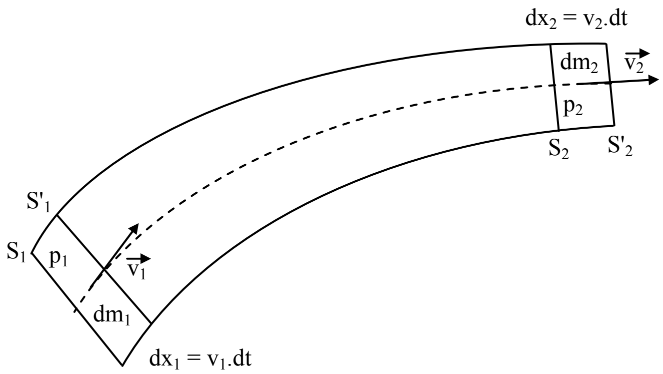
Débit volumique

$$\boxed{q_v = \frac{dV}{dt} \text{ en m}^3\text{.s}^{-1}}$$

Comme $m = \rho \times V$, les deux débits sont reliés par la relation :

$$\boxed{q_m = \rho \times q_v}$$

II. Equation de continuité ou de conservation



Ligne de courant

Courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide en régime stationnaire. Le vecteur vitesse est tangent à cette ligne.

Tube de courant

C'est l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

Equation de continuité

Pendant l'intervalle de temps dt, la masse dm_1 ayant traversé la surface S_1 sera la même que celle traversant l'élément de surface S_2, d'où :

$$\rho_1.dx_1.S_1 = \rho_2.dx_2.S_2$$

$$\rho_1.S_1.\frac{dx_1}{dt} = \rho_2.S_2.\frac{dx_2}{dt}$$

$$\rho_1.S_1.v_1 = \rho_2.S_2.v_2$$

Comme le fluide est parfait et incompressible $\rho = \rho_1 = \rho_2$, d'où :

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2} \text{ ou } \boxed{Q_V = Sv = cte}$$

III. Equation de Bernoulli (sans échange de travail)

Le fluide est parfait et incompressible, l'écoulement est permanent.

L'équation de Bernoulli traduit le fait que l'énergie totale reste constante lors de l'écoulement. L'énergie totale (E_T) est la somme de l'énergie cinétique (E_C), de l'énergie potentielle de pesanteur (E_{pz}) et l'énergie potentielle de pression (E_{pp}).

$$E_T = E_C + E_{pz} + E_{pp}$$

Entre deux instants t_1 et t_2 : $E_{T1} = E_{T2}$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 + \frac{m}{\rho}p_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 + \frac{m}{\rho}p_2$$

En divisant par la masse, on obtient l'équation de Bernoulli en fonction des énergies massiques :

$$\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{P_2}{\rho}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = E_T \ = cte \text{ (en J.kg}^{-1}\text{)}}$$

Equation de Bernoulli en fonction des pressions :

On multiplie l'équation précédente par ρ :

$$\boxed{\frac{\rho}{2}v^2 + \rho gz + p = cte \text{ (en Pa)}}$$

- p : pression statique
- ρgz : pression de pesanteur
- $\frac{\rho}{2}v^2$: pression cinétique.

Equation de Bernoulli en fonction des hauteurs :

On divise l'équation précédente par ρg :

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H = cte \text{ (en m)}}$$

- z : hauteur géométrique
- $\frac{v^2}{2g}$: hauteur due à la vitesse ou hauteur capable ou encore hauteur dynamique,
- $\frac{p}{\rho g}$: hauteur due à la pression,
- $z+\frac{p}{\rho g}$: hauteur piézométrique,
- H : hauteur totale.

A noter :

$$\boxed{\text{Pression} = \frac{\text{Energie}}{\text{Volume}} = \frac{\text{Puissance}}{\text{débit}}}$$

IV. Applications

Relation de Torricelli

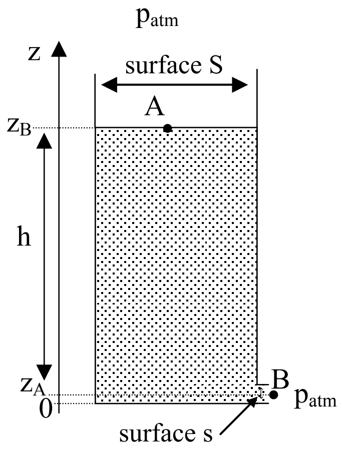
Détermination de la vitesse d'éjection d'un fluide.

Au point A la surface S et au point B, la surface s sont à l'air libre, donc la pression est égale à la pression atmosphérique.

La surface S est très grande devant la surface s.

L'application de la relation de Bernoulli entre le point A et le point B donne :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$



On simplifie cette expression :

Aux points A et B on peut écrire $p_A = P_{atm}$, $p_B = p_{atm}$.

Le débit est continu, donc : $Sv_A = sv_B$ mais comme $S >> s$ on en en déduit que $v_A << v_B$. v_A est négligeable devant v_B.

L'équation se simplifie ainsi :

$$\rho g z_A = \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

On simplifie par ρ :

$$g z_A = g z_B + \frac{1}{2} v_B^2$$

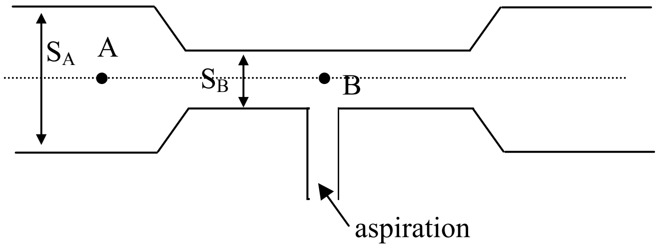
D'où :

$$v_B^2 = 2g(z_A - z_B) \text{ or } z_A - z_B = h$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Cette relation est connue sous le nom de formule de Torricelli.

Effet Venturi



Une conduite a la forme ci-dessus. Les points A et B sont sur la même ligne de courant.
L'équation de continuité permet d'écrire :

$$S_A v_A = S_B v_B$$

La relation de Bernoulli donne :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

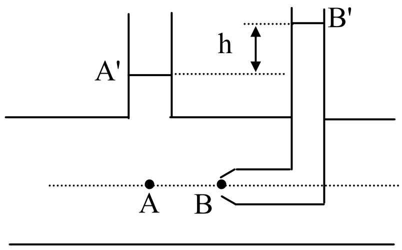
Soit comme $z_A = z_B$:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2)$$

D'après l'équation de continuité, comme $S_A >> S_B$, cela implique que $v_A << v_B$.
On en déduit que $p_B << p_A$ ce qui entraîne une aspiration. On trouve une utilité à cette application dans les trompes à eau, les pistolets à peinture…

Tube de Pitot



Le schéma ci-dessus représente un tube de Pitot. La ligne de courant passe par le point A et B. Au point B, nous avons un point d'arrêt, la vitesse du fluide est alors nulle ($v_B = 0$).
La relation de Bernoulli donne entre les points A et B :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

On simplifie cette relation : $z_A = z_B$ et $v_B = 0$:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B$$