Chapitre 1
SUITES

Exercices de base

1 Comportement global (étude de la monotonie et des bornes)

Étudiez le comportement global des suites dans chaque cas après avoir éventuellement émis des conjectures avec un algorithme ou un tableur :

1) (U_n) telle que $U_n = n^2 + n - 1$; (V_n) telle que $V_n = (-1)^n$; (W_n) telle que $W_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2) (U_n) telle que $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$; (V_n) telle que $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = 2V_n + 1 \end{cases}$; (W_n) telle que $\begin{cases} W_0 = 1 \\ W_{n+1} = 2W_n + n \end{cases}$.

3) (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{n} k$; (V_n) telle que $V_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$; (W_n) telle que $W_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + k\right)$.

2 Comportement asymptotique

Étudiez le comportement asymptotique des suites dans chaque cas après avoir éventuellement émis des conjectures avec un algorithme ou un tableur :

1) (U_n) telle que $U_n = n^2 - n - 1$; (V_n) telle que $V_n = (-1)^n + n$; (W_n) telle que $W_n = \dfrac{\cos n}{n}$.

2) (U_n) telle que $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$; (V_n) telle que $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = 2V_n - 1 \end{cases}$; (W_n) telle que $\begin{cases} W_0 = 1 \\ W_{n+1} = W_n + n \end{cases}$.

3) (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$; (V_n) telle que $V_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$; (W_n) telle que $W_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + k\right)$.

3 Le principe de récurrence – Cas différents de la question 2) de l'exercice 2

Montrez par récurrence la propriété (P_n) dans chaque cas, puis répondre aux questions éventuellement posées.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, (P_n) : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Soit a un réel strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}$, (P_n) : $(1+na) \leq (1+a)^n$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} q^n$ lorsque q est un réel strictement supérieur à 1.

4 Suites arithmétiques et géométriques

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_3 = 4 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_1 = 4 \\ V_{n+1} = 5V_n \end{cases}.$$

1) Exprimez U_n et V_n en fonction de n.

2) Déterminez $S = \sum_{k=4}^{20} U_k$ et $T = \sum_{k=0}^{10} V_k$.

5 QCM de synthèse

Mettre une croix dans les cases correspondant aux affirmations vraies.

	a	b	c	d
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

1) On considère la suite (U_n) telle que $U_n = n^3 - n$.

a) $U_{n+1} = 3n^2 + 3n$.
b) (U_n) est croissante.
c) (U_n) est bornée.
d) (U_n) est convergente.

2) On considère la suite (U_n) telle que $U_n = \dfrac{2}{n+3}$.

a) (U_n) est croissante.
b) (U_n) est bornée.
c) (U_n) converge vers $\dfrac{2}{3}$.
d) $\forall n \geq 200,\ 0 \leq U_n \leq 10^{-2}$.

3) On considère la suite arithmétique (U_n) telle que $U_8 = 16$ et $U_5 = 10$.

a) (U_n) a pour raison 2.
b) $U_0 = -2$.
c) (U_n) est minorée par 0.
d) $S = \sum_{k=0}^{k=10} U_k = 110$.

4) On considère la suite (U_n) telle que $\begin{cases} U_3 = 4 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$

a) $U_{12} = 78732$.
b) $U_n = 3^n \times 4$.
c) (U_n) est convergente.
d) $S = \sum_{k=0}^{k=6} U_k = \dfrac{4372}{27}$.

5) On considère la suite (U_n) telle que $\begin{cases} U_0 = a_0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3 \end{cases}$.

a) Il existe a_0 tel que (U_n) est constante.
b) La suite (V_n) telle que $V_n = U_n + 3$ est géométrique de raison 4.
c) On a $V_n = 2^n(a_0 + 3)$.
d) $\forall a_0 \in \mathbb{R}$, la suite (U_n) ne converge pas.

6) On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6} \end{cases}$.

a) On peut conjecturer à l'aide d'un graphe « WEB » que la suite est bornée, non monotone et convergente.
b) $\forall n \in \mathbb{N},\ -4 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 3$.
c) (U_n) converge vers –2.
d) Il existe n_0 tel que $U_{n_0} \geq 2$.

7) On considère la suite (U_n) telle que $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ (on pourra utiliser des algorithmes).

a) On a $U_1 = 7$; $U_2 = 15$; $U_3 = 30$.
b) On peut conjecturer que (U_n) est croissante.

c) On peut conjecturer que (U_n) est bornée.

d) Le plus petit indice n_0 tel que $U_{n_0} > 19782365$ est $n_0 = 23$.

8) On considère la suite (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra utiliser des algorithmes).

a) On a $U_3 = \frac{11}{6}$.

b) (U_n) est croissante.

c) (U_n) est majorée par 5.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$.

9) On considère la suite (U_n) telle que $U_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a) (U_n) est monotone.

b) (U_n) est bornée.

c) (U_n) est convergente.

d) $S_n = \sum_{k=0}^{k=4n} U_k = 0$.

10) On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra utiliser des algorithmes).

a) (U_n) est monotone.

b) On peut conjecturer que (U_n) est bornée.

c) On peut conjecturer que (U_n) est convergente.

d) La suite (V_n) telle que $V_n = U_{2n}$ est décroissante.

Exercices classiques

$\boxed{6}$ **Suite définie par son premier terme et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f croissante et suite auxiliaire arithmétique**

On considère les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 4}{U_n + 5} \end{cases} \text{ et } V_n = \frac{1}{U_n + 2}.$$

Partie A

1) Quelles conjectures peut-on émettre quant aux comportements global et asymptotique de la suite (U_n) à partir d'un graphe « WEB » ?

2) Montrez par récurrence les conjectures relatives au comportement global de la suite émises au 1) (bornes et monotonie).

3) Déduisez de la question précédente que (U_n) converge vers une limite L que l'on déterminera.

Partie B

1) Montrez en utilisant la partie précédente que U_n et V_n existent pour tout n.
2) Montrez que (V_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.
3) En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
4) Redémontrez alors les conjectures relatives aux comportements global et asymptotique de la suite (U_n).

7 **Suite définie par son premier terme et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f croissante et suite auxiliaire géométrique**

On considère les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 2}{U_n + 3} \end{cases} \text{ et } V_n = \frac{U_n + 2}{U_n - 1}.$$

Partie A

1) Quelles conjectures peut-on émettre quant aux comportements global et asymptotique de la suite (U_n) à partir d'algorithmes ?
2) Montrez par récurrence les conjectures relatives au comportement global de la suite émises au 1) (bornes et monotonie).
3) Déduisez de la question précédente que (U_n) converge vers une limite L que l'on déterminera.

Partie B

1) D'après la partie A montrez que U_n et V_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrez que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
3) En déduire V_n, puis U_n en fonction n.
4) Redémontrez que la suite (U_n) converge vers L.

8 **Placement financier – Comparaison d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique**

Le 1er janvier 2014, Jean place 10 000 € qui lui rapportent 2,8 % par an à intérêts composés et Pierre place la même somme qui lui rapporte 400 € constants par an.

On note respectivement U_n et V_n les sommes sur les comptes de Jean et Pierre au 1er janvier de l'année 2014 + n.

1) Exprimez U_n en fonction de n et montrez que la suite (U_n) est croissante.
2) Exprimez V_n en fonction de n et montrez que la suite (V_n) est croissante.
3) Construisez un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle date le capital de Pierre devient supérieur ou égal à celui de Jean et donnez cette date.
4) Quelle aurait été la date précédente si la somme de départ avait été de 12 000 € et non de 10 000 €.

9 Modèle d'évolution – Système de deux suites

On observe une population de 50 millions d'oiseaux, **d'effectif constant au cours du temps**, qui vit sur l'île Maurice et l'île de la Réunion.
On note respectivement a_n et b_n, les effectifs respectifs en millions d'oiseaux sur l'île Maurice et l'île de la Réunion au 1er juillet de l'année 2014 + n et l'on donne $a_0 = b_0 = 25$.
D'autre part on constate qu'entre le 1er juillet de l'année 2014 + n et le 1er juillet de l'année 2014 + (n + 1), 30 % des oiseaux de l'île de la Réunion migrent vers l'île Maurice et 20 % des oiseaux de l'île Maurice migrent vers la Réunion.

1) Montrez que : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,5a_n + 15 \\ b_{n+1} = 0,5b_n + 10 \end{cases}$.
2) On considère les suites (A_n) et (B_n) définies respectivement par $A_n = a_n - 30$ et $B_n = b_n - 20$. Montrez que ces deux suites sont géométriques et donnez le premier terme et la raison de chacune d'elles.
3) Exprimez A_n et B_n, puis a_n et b_n en fonction de n.
4) Étudiez la monotonie des suites (a_n) et (b_n) puis interprétez ce résultat.
5) Étudiez la convergence des suites (a_n) et (b_n) puis interprétez ce résultat.
6) Construisez un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle date le nombre d'oiseaux sur l'île Maurice sera supérieur à 29 millions et donnez cette date.

10 **Récurrence double**

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \ ; \ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 4U_{n+1} + 5U_n \end{cases}$.

1) Montrez que la suite (S_n) définie par $S_n = U_{n+1} + U_n$ est géométrique, puis exprimez S_n en fonction de n.

2) On considère les suites (V_n) et (T_n) définies par $V_n = (-1)^n U_n$ et $T_n = V_{n+1} - V_n$.

a) Exprimez T_n en fonction de S_n, puis $\sum_{k=0}^{k=n-1} T_k$ en fonction de n en utilisant cette expression et la question précédente.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{k=n-1} T_k$ en fonction de n et U_n en utilisant la définition de (T_n) c'est-à-dire $T_n = V_{n+1} - V_n$, puis en déduire U_n en fonction de n en utilisant la question précédente.

Exercices de réflexion

11 **Le théorème de convergence monotone 1 – Application à $U_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$**

Définition : On dit qu'une suite (U_n) converge lorsqu'il existe un nombre réel L tel que tout intervalle ouvert de centre L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui s'écrit aussi :
$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \geq n_0, \ |U_n - L| < \varepsilon$.
Propriété admise : Toute partie non vide A et majorée de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure notée supA qui est le plus petit des majorants de A.

1) On considère une suite (U_n) croissante majorée.

a) Montrez qu'elle converge vers supA où $A = \{U_n, \ n \in \mathbb{N}\}$.

b) Montrez alors par l'absurde que tous les termes de (U_n) sont inférieurs où égaux à la limite de (U_n).

2) On considère une suite (V_n) décroissante minorée.

a) Déduire de la propriété admise en introduction que toute partie non vide B et minorée de $\mathbb{R}$, admet une borne inférieure notée infB qui est le plus grand des minorants de B.

b) Déduire de la question précédente que (V_n) converge vers infB.

c) Montrez alors par l'absurde que tous les termes de (V_n) sont supérieurs ou égaux à la limite de (V_n).

3) Montrez que la suite (U_n) définie par $U_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

12 Le théorème de convergence monotone 2 – Application à $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Définition : On dit qu'une suite tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle du type $[A,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,A]$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui s'écrit aussi :
$\forall A > 0,\ \exists n_0 \ /\ \forall n \geq n_0,\ U_n \geq A$ si la limite est $+\infty$ et
$\forall A < 0,\ \exists n_0 \ /\ \forall n \geq n_0,\ U_n \leq A$ si la limite est $-\infty$.

1) Montrez qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
2) En déduire qu'une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.
3) On considère la suite (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$.

b) Montrez que (U_n) est croissante, puis en déduire par l'absurde que $\lim U_n = +\infty$.

13 Le théorème des gendarmes – Application à $U_n = 2 + \frac{\sqrt{n}}{n + \cos n}$ pour $n \geq 2$

On considère trois suites (U_n), (V_n), (W_n) telles que d'une part à partir d'un certain rang n_1 on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ et d'autre part on a $\lim V_n = \lim W_n = L$.
En outre, on considère un réel $\varepsilon > 0$.

1) Montrez qu'à partir d'un certain rang n_2 on a : $L - \varepsilon < V_n$.
2) Montrez qu'à partir d'un certain rang n_3 on a : $W_n < L + \varepsilon$.
3) Montrez qu'à partir d'un certain rang n_4 on a : $L - \varepsilon < U_n < L + \varepsilon$ (prendre $n_4 = \max(n_1, n_2, n_3)$).