Chapitre 1
METHODES SUR LES SUITES

Nous allons voir comment :

1) Conjecturer le comportement d'une suite

2) Raisonner par récurrence

3) Utiliser les suites arithmétiques et géométriques

4) Étudier le comportement global d'une suite

5) Étudier le comportement asymptotique d'une suite

6) Déterminer des résultats expérimentaux

1. Comment conjecturer le comportement d'une suite

On va vous expliquer comment vous pouvez étudier expérimentalement les bornes, la monotonie, et la convergence d'une suite.

Cela repose sur l'utilisation de graphiques, de tableurs ou d'algorithmes.

METHODE 1 : Comment conjecturer le comportement d'une suite à partir du graphe $(n,\ U_n)$ pour $n \geq n_0$

■ **Cas d'application**

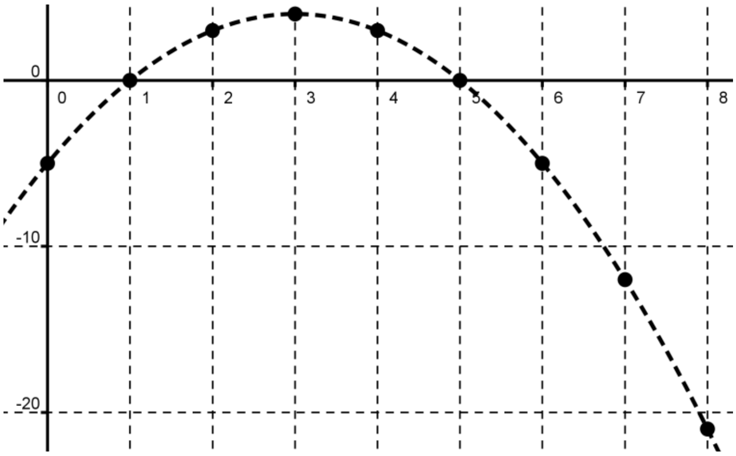
Lorsque la suite est de la forme $U_n = f(n)$ et que la courbe représentative de f s'obtient facilement sur $[n_0\ ;\ +\infty[$.

■ **Principe**

On conjecture le comportement de la suite à partir de la courbe représentative de f.

■ **Exemple :** *Conjecturer le comportement* (U_n) *telle que* $U_n = -n^2 + 6n - 5$.

Sur le graphique suivant, la courbe représente la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ et les points ont pour coordonnées $(n,\ U_n)$.



Conjectures

On peut conjecturer que (U_n) n'est pas monotone mais décroît à partir de $n=3$, n'est pas minorée mais majorée par 4, et enfin qu'elle n'est pas convergente puisqu'il semble qu'elle tende vers $-\infty$.

METHODE 2 : Comment conjecturer le comportement d'une suite à partir du graphe « WEB »

■ Principe

On construit l'escalier ou l'escargot de convergence à partir de la courbe représentative de f et la droite d'équation y = x.
Les conjectures sont émises à partir des premières valeurs de la suite représentées sur l'axe des abscisses.

■ Cas d'application

Lorsque la suite est de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$ et que la courbe représentative de f s'obtient facilement là où varie la suite.

■ **Exemple :** *On considère la suite (U_n) définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases}$

1) Dresser le tableau de variations de f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{-2x+9}$.

2) Tracer la droite (D) d'équation $y = x$ et la courbe représentative de f sur $[0\ ;\ 1]$, puis représenter les premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses en laissant apparaître les traits de constructions (graphe « Web »).

3) Que peut-on conjecturer sur le comportement de (U_n) ?

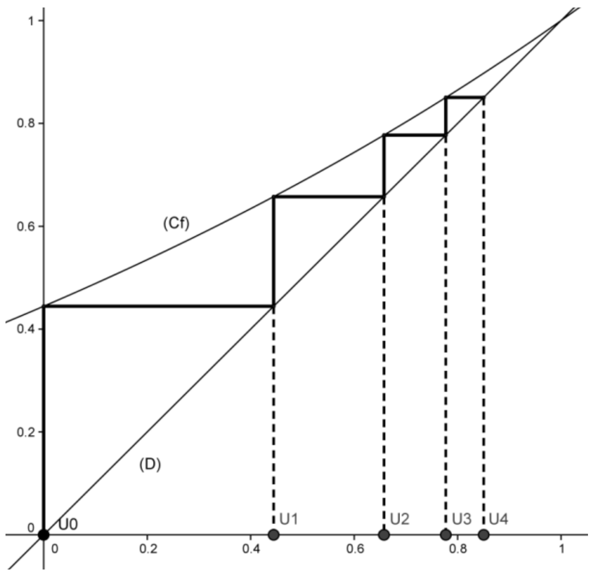
1) f est une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et l'on a :

$f'(x)=\dfrac{3(-2x+9)-(-2)(3x+4)}{(-2x+9)^2}=\dfrac{35}{(-2x+9)^2}>0$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	**0**	**1**
f′(x)	+	
f	**4/9** ↗	**1**

2) On obtient le graphe « WEB » suivant :



Ce graphique permet de conjecturer que la suite (U_n) est croissante, que $U_n \in [0\ ;\ 1[$, et qu'elle converge vers 1.

METHODE 3 : Comment conjecturer le comportement d'une suite avec un algorithme

■ Principe
On crée une boucle de longueur finie qui permet de calculer les termes de la suite.

■ Cas d'application
Toujours, mais plus spécifiquement quand les méthodes 1 et 2 ne peuvent s'appliquer.

■ **Exemple :** *Conjecturer le comportement de* (U_n) *telle que :*

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (n \geq 1).$$

Dans la mesure où U_n est la somme des inverses des entiers allant de n à 2n, il ne va pas être facile de trouver une fonction simple de la variable réelle telle que $U_n = f(n)$.

On peut toujours calculer « à la main » les premiers termes de la suite pour avoir une idée de sa monotonie, mais ce sera vite lassant et insuffisant pour étudier son éventuelle convergence.

On vous propose l'algorithme suivant pour mieux cerner ce dernier problème :

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  U PREND_LA_VALEUR 1/N
  POUR I ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR U+1/(N+I)
    FIN_POUR
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

On obtient par exemple :

n	Un
1	1,5
2	1,0833333
3	0,94
4	0,88452381
100	0,70065343
1000	0,6932218
10000	0,6931548

On conjecture que la suite est décroissante, majorée par son premier terme, $U_1 = 1{,}5$, clairement minorée par 0, et semble converger vers un nombre peu différent de 0,6931.

METHODE 4 : Comment conjecturer le comportement d'une suite avec un tableur

■ Principe

On entre la formule qui va bien et « l'éternel » copier-coller fait le reste.
On peut éventuellement insérer un graphique (n, U_n) pour visualiser.

■ Cas d'application

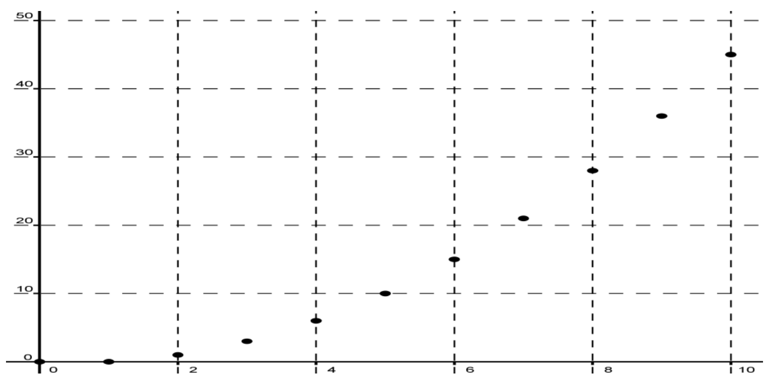
Toujours, mais plus spécifiquement quand les méthodes 1 et 2 ne peuvent s'appliquer.

■ **Exemple :** *Conjecturer le comportement de* (U_n) *définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + n \\ U_0 = 0 \end{cases}$.

On entre en B3 la formule : « =B2+A2 », on copie on colle de B4 à B12 et l'on obtient :

	A	B
1	n	Un
2	0	0
3	1	0
4	2	1
5	3	3
6	4	6
7	5	10
8	6	15
9	7	21
10	8	28
11	9	36
12	10	45

Le nuage de points correspondant est :



On conjecture que (U_n) est croissante minorée par 0, non majorée, qu'elle est croissante et qu'elle ne converge pas puisqu'il semble que $\lim U_n = +\infty$.

2. Le raisonnement par récurrence

METHODE 5 : Comment raisonner par récurrence

■ Cas d'application

On doit prouver qu'une propriété (P_n) est vraie pour $n \geq n_0$ avec n et n_0 entiers naturels, n_0 étant fixé.

■ Principe

On vous conseille les trois étapes suivantes pour rédiger votre démonstration par récurrence.

1) Initialisation : montrer que (P_{n_0}) est vraie.

2) Hérédité : montrer que pour $n \geq n_0$ quelconque, on a :

$$(P_n) \text{ vraie} \Rightarrow (P_{n+1}) \text{ vraie}.$$

3) Conclusion : Conclure par récurrence que (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

■ **Exemple :** *On a conjecturé dans la méthode 2 que la suite (U_n) définie par*

$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases}$ *était croissante, et que $U_n \in [0;1[$.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère (P_n) : « $0 \leq U_n \leq U_{n+1} < 1$ ».

Montrer par récurrence que la propriété (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que peut-on en déduire ?

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$U_0 = 0$ et $U_1 = f(U_0) = f(0) = \dfrac{4}{9}$, donc $0 \leq U_0 \leq U_1 < 1$ et (P_0) est vraie.

Hérédité : Pour $n \geq n_0$ quelconque, est-ce que l'on a (P_n) vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ vraie ?

– Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie. (Ceci est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence (HR), qui, ici est : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} < 1$).

– On doit montrer sous cette hypothèse que (P_{n+1}) est vraie c'est-à-dire que $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} < 1$.

– Comme f est strictement croissante sur $[0;1]$

$$0 \leq U_n \leq U_{n+1} < 1 \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) < f(1) \Rightarrow \frac{4}{9} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} < 1.$$

– Finalement $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} < 1$ et (P_{n+1}) est vraie.

– Conséquence : (P_n) vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ vraie.

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

On en déduit d'une part que $U_n \neq \frac{9}{2}$ $(U_n \in [0;1[)$ et donc que U_n est définie pour tout n, puis d'autre part que les conjectures émises à la méthode 2 concernant le comportement global de (U_n) sont vraies.
En effet on a bien $U_n \in [0;1[$ et comme $U_n \leq U_{n+1}$ la suite (U_n) est croissante.

3. Suites arithmétiques et géométriques

Les méthodes sont simples mais les calculs souvent lourds… Entraînez-vous !

METHODE 6 : Comment utiliser les formules

■ **Rappel des formules :**

	Suites arithmétiques $U_{n+1} = U_n + r$	**Suites géométriques** $U_{n+1} = qU_n$ **où** $q \neq 1$
Expression de U_n	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{(n-p)}U_p$
Somme de termes consécutifs	$(\text{Nb de T})\left(\frac{1^{er}\,T + DT}{2}\right)$	$(1^{er}\,T)\left(\frac{1-q^{(\text{Nb de T})}}{1-q}\right)$
Apprendre par cœur	$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$	$1+q+q^2+\cdots+q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

1^{er} T : premier terme ; DT : dernier terme ; Nb de T : nombre de termes

■ **Principe**
Comme dans toutes les formules on identifie ce que l'on connaît, et l'on remplace dans la formule pour trouver l'inconnue.

■ **Exemple :** *On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2 \\ U_3 = 0 \end{cases}$.*
Déterminer (U_n) en fonction de n, puis $S = U_4 + U_5 + \cdots + U_{20}$ de deux façons.

(U_n) est une suite arithmétique de raison 2 de terme connu $U_3 = 0$.
On a donc $U_n = U_3 + (n-3)\times 2 = 0 + 2n - 6 = 2n - 6$.
$S = (\text{Nb de T})\left(\frac{1^{er}\,T + DT}{2}\right) = 17\left(\frac{U_4 + U_{20}}{2}\right) = 17\left(\frac{2+34}{2}\right) = 306$.
Pour calculer cette somme on pouvait aussi appliquer la formule de gauche à apprendre par cœur, en effet :

$S = 2 + 4 + \cdots + 36 = 2(1 + 2 + \cdots + 17) = 2\dfrac{17 \times 18}{2} = 306$.

METHODE 7 : Comment montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique et l'exploiter

■ Principe

On montre que (V_n) est arithmétique en prouvant que $V_{n+1} - V_n$ est constant.

On montre que (V_n) est géométrique en prouvant que $V_n \neq 0$ puis que $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ est constant.

■ Cas d'application

Lorsqu'une suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique, il se peut qu'une suite auxiliaire (V_n) construite à partir d'elle le soit.
On applique alors à (V_n) les formules de la méthode 6, puis on revient à (U_n).

■ **Exemple :** *On considère (U_n) et (V_n) telles que :*

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases} \text{ et } V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 2}.$$

On a montré dans la méthode 5 que (U_n) est définie et que $U_n \in [0;1[$.
Justifier alors que la suite (V_n) existe et ne s'annule pas, puis montrer qu'elle est géométrique.
Exprimer ensuite V_n en fonction de n, puis U_n fonction de n.

Comme $U_n \in [0;1[$ on a $U_n \neq 2$ et $U_n \neq 1$ donc (V_n) existe et ne s'annule pas.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\dfrac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} - 2}}{\dfrac{U_n - 1}{U_n - 2}} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} - 2} \times \frac{U_n - 2}{U_n - 1} = \frac{\dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} - 1}{\dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} - 2} \times \frac{U_n - 2}{U_n - 1} = \frac{5U_n - 5}{7U_n - 14} \times \frac{U_n - 2}{U_n - 1}.$$

Finalement $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{5(U_n - 1)}{7(U_n - 2)} \times \dfrac{U_n - 2}{U_n - 1} = \dfrac{5}{7}$, et (V_n) géométrique de raison $\dfrac{5}{7}$.

Comme le premier terme de (V_n) est $V_0 = \dfrac{U_0 - 1}{U_0 - 2} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que :

$$V_n = q^n V_0 = \left(\frac{5}{7}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right).$$

Nous allons exprimer U_n en fonction de V_n à partir de la formule $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 2}$, puis remplacer V_n par ce que nous venons de trouver.