Chapitre 1
Compléments de mathématiques

Approximation d'une fonction trigonométrique au voisinage de l'origine

1.

A. La fonction $\sin x$ est une fonction paire de la variable x.
B. La fonction $\sin x$ est une fonction impaire de la variable x.
C. La fonction $\cos x$ est une fonction paire de la variable x.
D. La fonction $\cos x$ est une fonction impaire de la variable x.
E. La fonction $\tan x$ est une fonction impaire de la variable x.

2.

A. Au voisinage de $x = 0$, le développement de $\sin x$ en puissances de x ne contient que des puissances paires de x.
B. Au voisinage de $x = 0$, le développement de $\sin x$ en puissances de x ne contient que des puissances impaires de x.
C. Au voisinage de $x = 0$, le développement de $\sin x$ en puissances de x contient des puissances paires et impaires de x.
D. Au voisinage de $x = 0$, le développement de $\cos x$ en puissances de x ne contient que des puissances paires de x.
E. Au voisinage de $x = 0$, le développement de $\cos x$ en puissances de x ne contient que des puissances impaires de x.

3. Au deuxième ordre, le développement de $\sin x$ au voisinage de $x = 0$ vaut :

A. $x - \frac{x^2}{2}$.
B. x.
C. $x + \frac{x^2}{2}$.
D. $1 - \frac{x^2}{2}$.
E. $x - \frac{x^3}{6}$.

4. Au deuxième ordre, le développement de $\cos x$ au voisinage de $x=0$ vaut :

A. $1+\frac{x^2}{2}$.
B. $1-x^2$.
C. $\frac{x^2}{2}$.
D. $1-\frac{x^2}{2}$.
E. $1-x$.

5. Au deuxième ordre, le développement de $\tan x$ au voisinage de $x=0$ vaut :

A. $x+\frac{x^2}{3}$.
B. $2x$.
C. $2x+\frac{x^3}{3}$.
D. $1-x$.
E. x .

Fonctions à plusieurs variables, dérivées partielles et gradient

x, y et z étant les cordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace par rapport à une origine O, on considère la fonction : $\mathrm{f}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

6. La surface telle que $\mathrm{f}(x,y,z)=C$ où C est une constante est :

A. Un cercle.
B. Un ellipsoïde de révolution.
C. Un plan.
D. Une sphère centrée en O.
E. Un cube de centre O.

7. La dérivée partielle $\dfrac{\partial \mathrm{f}(x,y,z)}{\partial x}$ vaut :

A. $-\dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

B. $-\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

C. $-\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

D. $-\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

E. $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

8. $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ étant les trois vecteurs unitaires colinéaires aux trois axes x, y et z, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{f}(x,y,z)$:

A. Vaut $-\dfrac{x\overrightarrow{e_x}+y\overrightarrow{e_y}+z\overrightarrow{e_z}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

B. Est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

C. Est orthogonal aux surfaces $\mathrm{f}(x,y,z)=C$.

D. Vaut $-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\|^3}$.

E. A pour norme $\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\|^2}$.

Produit vectoriel

Une base orthonormée cartésienne directe est définie par l'ensemble de vecteurs unitaires $\left\{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right\}$. Soient les deux vecteurs :

$$\vec{A} = \overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y} + 2\overrightarrow{e_z}$$

et $B = 2\overrightarrow{e_x} - 2\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}$.

Soit : $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

9.

A. $\vec{C} = 2\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} - 2\overrightarrow{e_z}$.

B. $\vec{C} = 3\left(2\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y} - 2\overrightarrow{e_z}\right)$.

C. $\vec{C} = 3\left(2\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} - 2\overrightarrow{e_z}\right)$.

D. $\vec{C} = 3\left(2\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y} + 2\overrightarrow{e_z}\right)$.

E. $\vec{C} = 2\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y} + 2\overrightarrow{e_z}$.

10.

A. $\vec{C}$ est orthogonal à $\vec{A}$.

B. $\vec{C}$ est orthogonal à $\vec{B}$.

C. $\vec{A}$ est orthogonal à $\vec{B}$.

D. $\left\|\vec{C}\right\| = 3$.

E. $\left\|\vec{C}\right\| = \left\|\vec{A}\right\| \cdot \left\|\vec{B}\right\|$.

Coordonnées cylindriques, mouvement circulaire uniforme

Soit un point M décrivant un cercle de centre O et de rayon R avec une vitesse angulaire ω constante. On travaille dans un système de coordonnées cylindriques de centre O et d'axe privilégié Oz perpendiculaire au plan du cercle ; le cercle est décrit dans le sens positif par rapport à Oz. On considère, par convention, qu'au temps $t=0$, $\varphi=0$.

11. Les coordonnées cylindriques du point M en fonction du temps sont :

A. $z=0$.
B. $\rho=R\cos\omega t$.
C. $\rho=R$.
D. $\varphi=\omega t$.
E. $\varphi=R\sin\omega t$.

12. La vitesse du point M peut s'écrire :

A. $\vec{v}=R\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\rho}}{\mathrm{d}t}$.
B. $\vec{v}=R\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\rho}}{\mathrm{d}\varphi}$.
C. $\vec{v}=R\overrightarrow{e_\varphi}$.
D. $\vec{v}=R\omega\overrightarrow{e_\varphi}$.
E. $\vec{v}=\omega\overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

13. L'accélération du point M peut s'écrire :

A. $\vec{a}=R\omega^2\overrightarrow{e_\varphi}$.
B. $\vec{a}=-R\omega^2\overrightarrow{e_\varphi}$.
C. $\vec{a}=R\omega^2\overrightarrow{e_\rho}$.
D. $\vec{a}=-R\omega^2\overrightarrow{e_\rho}$.
E. $\vec{a}=\omega\overrightarrow{e_z}\times\left(\omega\overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

Corrigés

1. B – C – E

La fonction $\sin x$ est telle que : $\sin(-x) = -\sin x$. Cela est caractéristique d'une fonction impaire de x.

La fonction $\cos x$ est telle que : $\cos(-x) = \cos x$. Cela est caractéristique d'une fonction paire de x.

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ Si on transforme x en $-x$, le numérateur change de signe, alors que le dénominateur ne change pas de signe. On a donc : $\tan(-x) = -\tan x$. La fonction $\tan x$ est donc une fonction impaire de x.

2. B – D

La fonction $\sin x$ étant une fonction impaire de x, son développement en puissances de x ne comportera que des puissances impaires de x.

La fonction $\cos x$ étant une fonction paire de x, son développement en puissances de x ne contiendra que des puissances paires de x.

3. B

Le développement de $\sin x$ en puissances de x ne contenant que des puissances impaires de x, il sera identique au premier et au deuxième ordre. Le développement de $\sin x$ au premier ordre s'écrit (cf. cours page 2) :

$$\sin x \approx \sin 0 + x \cdot \left.\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \sin 0 + x \cdot \cos 0 = x$$

Note :

La réponse E est exacte au troisième ordre, mais c'est un développement limité au deuxième ordre qui est demandé.

4. D

Au deuxième ordre, les relations connues entre fonctions $\sin x$ et $\cos x$ doivent être vérifiées. En particulier, on doit avoir : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. D'où, au deuxième ordre : $\cos^2 x = 1 - x^2$. On a donc $\cos x = \left(1 - x^2\right)^{1/2}$. x^2 étant « très petit » par rapport à 1, on peut utiliser un développement de cette expression (cf. cours, exemple page 2) : $\left(1 - x^2\right)^{1/2} \approx 1 - \dfrac{1}{2}x^2$. Au deuxième ordre, on a donc : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Remarque :

Il existe bien sûr d'autres méthodes. L'une d'entre elles permet en fait d'obtenir, de manière itérative, les développements de $\sin x$ et $\cos x$ à tous les ordres.

On a : $$\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x \ .$$

En remplaçant dans cette expression $\sin x$ par son expression obtenue à la qcm 3, cette expression devient : $\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -x$, dont la primitive est $\cos x = -\frac{x^2}{2} + C_1$. La constante d'intégration C_1 s'obtient en faisant tendre x vers 0 : $C_1 = \cos 0 = 1$. On retrouve donc ainsi $\cos x$ au deuxième ordre :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \ .$$

On a aussi : $$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x \ .$$

En remplaçant $\cos x$ par son expression au deuxième ordre, on obtient : $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x^2}{2}$ dont la primitive est $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + C_2$. En faisant tendre x vers 0, on obtient : $C_2 = \sin 0 = 0$. On a donc obtenu le développement de $\sin x$ au troisième ordre :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \ .$$

En continuant la procédure, on peut ainsi obtenir les développements de $\sin x$ et $\cos x$ à tous les ordres.

5. E

$\tan x$ étant une fonction impaire de x, son développement ne contient que des puissances impaires de x. Son développement au deuxième ordre sera donc identique à celui au premier ordre et il suffit de calculer ce dernier.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Au premier ordre, cette expression s'écrit : $\tan x \approx \frac{x}{1} = x$.

6. D

L'équation de la surface $f(x,y,z)=C$ s'écrit $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C$ ou encore :

$x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{C^2}$.

Ceci est l'équation, en coordonnées cartésiennes, d'une sphère centrée à l'origine O et de rayon $\dfrac{1}{C}$.

7. B

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=-\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} .$$

8. A – B – C – D – E

Par analogie, $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=-\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$

et $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=-\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

Par définition du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y,z)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{e}_z .$$

En remplaçant les dérivées partielles par leurs valeurs :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y,z)=-\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} .$$

Or $\overrightarrow{\text{OM}}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y,z)=-\dfrac{\overrightarrow{\text{OM}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$, qui est, bien sûr, colinéaire à $\overrightarrow{\text{OM}}$.

Le rayon vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ est orthogonal aux sphères de centre O et donc aux surfaces $f(x,y,z)=C$.

$\left\|\overrightarrow{\text{OM}}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y,z)=-\dfrac{\overrightarrow{\text{OM}}}{\left\|\overrightarrow{\text{OM}}\right\|^3}$.