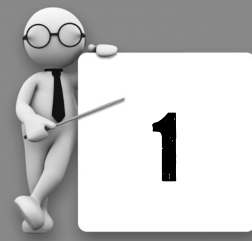
# Démontrer une implication ou une équivalence




## Quand on ne sait pas !

Soit $P$ et $Q$ deux propositions.

- **(Implication)** On appelle implication de $Q$ par $P$, et on note $P \Longrightarrow Q$, la proposition $(\text{NON } P)$ OU $Q$.
  $P \Longrightarrow Q$ se lit « $P$ implique $Q$ » ou encore « si $P$, alors $Q$ ».
  Le symbole $\Longrightarrow$ ne signifie pas « donc ».
- **(Équivalence)** On appelle équivalence de $P$ et $Q$, et on note $P \Longleftrightarrow Q$, la proposition $[P \Longrightarrow Q]$ ET $[Q \Longrightarrow P]$.
- **(Disjonction)** Toute disjonction peut être reformulée sous la forme d'une implication :

$$[P \text{ OU } Q] \quad = \quad [(\text{NON } P) \Longrightarrow Q]$$

## Que faire !

*Par la suite, les $^{(*)}$ signifient que les points de suspension sont à compléter en fonction des données de l'énoncé.*

- Pour montrer l'implication $P \Longrightarrow Q$, on effectue un raisonnement direct qu'on rédige comme suit :

> Supposons $P$, c'est-à-dire ... $^{(*)}$. Montrons $Q$, c'est-à-dire ... $^{(*)}$.
>
> [ *Raisonnement qui aboutit à Q* ]
>
> Conclusion : on a bien montré l'implication $P \Longrightarrow Q$.

- Pour montrer l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$, on peut :
  - ou bien raisonner par double implication, c'est-à-dire montrer successivement les deux implications $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$,

- ou bien raisonner par équivalences, c'est-à-dire modifier $P$ de proche en proche jusqu'à obtenir $Q$ en préservant les équivalences à chaque étape.
  On rédige alors de la manière suivante :

> On a les équivalences suivantes :
>
> $$P \iff \cdots \iff \cdots \iff Q$$
>
> *équivalences déjà établies (dans le cours en général) ou à justifier*
>
> Conclusion : on a bien montré l'équivalence $P \iff Q$.

- Pour montrer la disjonction $P$ OU $Q$, il suffit de montrer l'implication $\big[(\text{NON } P) \Longrightarrow Q\big]$.
  On rédige alors de la manière suivante :

> Supposons NON $P$, c'est-à-dire $\ldots$ $^{(*)}$. Montrons $Q$, c'est-à-dire $\ldots$ $^{(*)}$.
>
> [ *Raisonnement qui aboutit à Q* ]
>
> Conclusion : on a bien montré la disjonction $P$ OU $Q$.

**EXEMPLE 1** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \max\big(x^2, (x-2)^2\big) \geq 1.$

**SOLUTION**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\max\big(x^2, (x-2)^2\big) \geq 1$, c'est-à-dire $\overbrace{x^2 \geq 1}^{P}$ OU $\overbrace{(x-2)^2 \geq 1}^{Q}$.
Montrons alors $(\text{NON } P) \Longrightarrow Q$.
Supposons NON $P$, c'est-à-dire $x^2 < 1$. Montrons $Q$, c'est-à-dire $(x-2)^2 \geq 1$.
Comme $x^2 < 1$, on en déduit alors :

$$\begin{array}{lrcccr} & -1 & < & x & < & 1 \\ \text{d'où :} & -3 & < & x-2 & < & -1 \\ \text{d'où :} & 9 & > & (x-2)^2 & > & 1 \\ \text{d'où :} & & & (x-2)^2 & \geq & 1 \end{array}$$

par stricte décroissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^-$

Conclusion : on a bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\max\big(x^2, (x-2)^2\big) \geq 1$.

## Conseils

- Souvent les implications à montrer ne sont pas rédigées sous la forme « $P \Longrightarrow Q$ ».
  Il faut donc identifier l'implication à montrer en précisant les propositions $P$ et $Q$ en jeu.
- Pour montrer une équivalence en raisonnant par équivalences, il faut justifier si nécessaire les équivalences écrites à chaque étape. Si l'ombre d'un doute plane, il faut démontrer l'équivalence demandée en raisonnant par double implication.
- Il faut bien comprendre la différence fondamentale entre « $\Longrightarrow$ » et « donc » :

- l'implication $P \implies Q$ signifie que « SI $P$ est vraie, ALORS $Q$ est vraie ». En fin de compte, on ne sait pas si les propositions $P$ et $Q$ sont vraies ou pas,
- la déduction « $P$ est vraie, DONC $Q$ est vraie » signifie :

$$\big[P \text{ est vraie ET } P \implies Q\big] \quad \text{DONC} \quad \big[Q \text{ est vraie}\big]$$

  On sait que $P$ est vraie, et on déduit que $Q$ est vraie.

## Exemple traité

Montrer : $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big[x^2+y^2=0\big] \iff \big[x=y=0\big].$

**SOLUTION**

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons l'équivalence suivante en raisonnant par double implication :

$$\overbrace{\big[x^2+y^2=0\big]}^{P} \iff \overbrace{\big[x=y=0\big]}^{Q}$$

- $(Q \implies P)$ Supposons $Q$, c'est-à-dire $x=y=0$. Montrons $P$, c'est-à-dire $x^2+y^2=0$. Calculons : $\quad x^2+y^2=0^2+0^2=0$.
- $(P \implies Q)$ Supposons $P$, c'est-à-dire $x^2+y^2=0$. Montrons $Q$, c'est-à-dire $x=y=0$. Comme $x^2+y^2=0$, il vient : $\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-y^2}_{\leq 0}$. Ainsi $x^2=-y^2=0$, d'où $x=y=0$.

Conclusion : on a bien montré que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\big[x^2+y^2=0\big] \iff \big[x=y=0\big]$.

## Exercices

**EXERCICE 1.1** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n$ est impair, alors $n^2$ est impair.

## Pour vous aider à démarrer

**EXERCICE 1.1** On suppose $n$ impair, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.
Montrer que $n^2$ est impair, i.e. il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n^2=2k'+1$.

## Solutions des exercices

**EXERCICE 1.1** Montrons l'implication suivante : $\overbrace{[n \text{ impair}]}^{P} \implies \overbrace{[n^2 \text{ impair}]}^{Q}$

Supposons $P$, c'est-à-dire $n$ impair, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.
Montrons $Q$, c'est-à-dire $n^2$ impair, c'est-à-dire qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n^2=2k'+1$.
*Remarque : $k$ est un entier supposé connu, tandis que $k'$ est un entier qu'on souhaite trouver.*
Comme $n=2k+1$, il vient que $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2\times(2k^2+2k)+1$.
Posons $k'=2k^2+2k \in \mathbb{N}$ et on en déduit alors que $n^2=2k'+1$.
Conclusion : on a bien montré que si $n$ est impair, alors $n^2$ est impair.

# 2 Raisonner par contraposée ou par l'absurde

## Quand on ne sait pas !

Soit $P$ et $Q$ deux propositions.

- **(Implication)** On appelle implication de $Q$ par $P$, et on note $P \Longrightarrow Q$, la proposition $\big(\text{NON } P\big)$ OU $Q$.
  $P \Longrightarrow Q$ se lit « $P$ implique $Q$ » ou encore « si $P$, alors $Q$ ».
  Le symbole $\Longrightarrow$ ne signifie pas « donc ».
- **(Contraposée)** La contraposée de $P \Longrightarrow Q$ est l'implication NON $Q \Longrightarrow$ NON $P$.
- **(Équivalence entre une implication et sa contraposée)**

$$\big[P \Longrightarrow Q\big] \quad \Longleftrightarrow \quad \big[\text{NON } Q \Longrightarrow \text{NON } P\big]$$

- **(Négation d'une implication)** La négation de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est :

$$\text{NON } \big[P \Longrightarrow Q\big] = \text{NON } \big[(\text{NON } P) \text{ OU } Q\big] = P \text{ ET } (\text{NON } Q)$$

## Que faire !

- Un raisonnement par contraposée permet de montrer une implication $P \Longrightarrow Q$ en montrant sa contraposée NON $Q \Longrightarrow$ NON $P$.
  Un raisonnement par l'absurde permet de montrer qu'une proposition $R$ donnée (qui peut aussi bien être une implication que ne pas l'être !) est vraie en supposant NON $R$ et en cherchant une contradiction.
- Pour montrer une implication $P \Longrightarrow Q$, on peut effectuer :
  - ou bien un raisonnement direct (cf. fiche 1),
  - ou bien un raisonnement par contraposée,
  - ou bien un raisonnement par l'absurde.

  Ces deux derniers raisonnements, même s'ils peuvent servir la même cause, sont distincts sur le plan logique et sont donc à différencier. On propose ci-après une rédaction systématique pour chacun de ces raisonnements lorsqu'on souhaite montrer une implication :

**Raisonnement par contraposée**

Pour montrer $P \Longrightarrow Q$, il suffit de montrer l'implication NON $Q \Longrightarrow$ NON $P$.
On rédige alors de la manière suivante :

> Supposons NON $Q$, c'est-à-dire . . . (*)
> Montrons NON $P$, c'est-à-dire . . . (*)
>
> [ *Raisonnement qui aboutit à* NON $P$ ]
>
> Conclusion : on a bien montré que NON Q $\Longrightarrow$ NON $P$, donc $P \Longrightarrow Q$.

**Raisonnement par l'absurde**

Pour montrer $P \Longrightarrow Q$, on suppose que cette implication est fausse et on cherche une contradiction.
On rédige alors de la manière suivante :

> Supposons NON $\left[P \Longrightarrow Q\right]$, c'est-à-dire $P$ ET (NON $Q$), c'est-à-dire . . . (*)
> Cherchons une contradiction.
>
> [ *Raisonnement qui aboutit à une contradiction* ]
>
> Contradiction !
> Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir NON $\left[P \Longrightarrow Q\right]$, est fausse. Ainsi, $P \Longrightarrow Q$.

(*) *À compléter en fonction des données de l'énoncé. Cette étape de traduction ne doit pas être négligée.*

## Conseils

- Pour montrer une implication, il faut commencer par expliciter clairement les propositions $P$ et $Q$ en jeu.
- Pour montrer une implication, on privilégie un raisonnement direct. S'il ne permet pas d'aboutir, alors on envisage un raisonnement par contraposée ou par l'absurde.
- Pour montrer une existence (respectivement une non-existence), on peut raisonner par l'absurde : on suppose la non-existence (respectivement l'existence), puis on cherche une contradiction.

**EXEMPLE 1** Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P$ à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \mathrm{e}^x$$

**SOLUTION**

Supposons qu'un tel polynôme $P$ existe. Cherchons une contradiction.
Ce polynôme $P$ vérifie nécessairement : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} P(x) = 1 \qquad (\star)$
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} P(x) = 0$ car, par croissances comparées, l'exponentielle l'« emporte » sur les puissances en $+\infty$, donc sur les polynômes en $+\infty$.
Par passage à la limite en $+\infty$ dans $(\star)$, on trouve alors que $0 = 1$. Contradiction !
Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir l'existence d'un tel polynôme $P$, est fausse.
Ainsi, il n'existe pas de polynôme $P$ à coefficients réels tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \mathrm{e}^x$.

## Exemple traité

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'implication suivante :

$$\left[x \notin \mathbb{Q}\right] \Longrightarrow \left[1 + x \notin \mathbb{Q}\right]$$

**SOLUTION**

On commence par préciser les propositions $P$ et $Q$ suivantes :

$$\underbrace{\left[x \notin \mathbb{Q}\right]}_{P} \Longrightarrow \underbrace{\left[1 + x \notin \mathbb{Q}\right]}_{Q}$$

- **(Méthode 1 : avec un raisonnement par contraposée)**
  Supposons NON $Q$, c'est-à-dire $1 + x \in \mathbb{Q}$. Montrons NON $P$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{Q}$.
  Comme $1 + x \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $1 + x = \dfrac{a}{b}$. On en déduit alors que :

  $$x = (1 + x) - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b} \in \mathbb{Q}$$

  Conclusion : on a bien montré que NON $Q \Longrightarrow$ NON $P$, donc $P \Longrightarrow Q$.
- **(Méthode 2 : avec un raisonnement par l'absurde)**
  Supposons NON $\left[P \Longrightarrow Q\right]$, c'est-à-dire $P$ ET (NON $Q$), c'est-à-dire $x \notin \mathbb{Q}$ et $1 + x \in \mathbb{Q}$.
  Cherchons une contradiction.
  Comme $1 + x \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $1 + x = \dfrac{a}{b}$. On en déduit alors que :

  $$x = (1 + x) - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b} \in \mathbb{Q}$$

  Contradiction avec l'hypothèse $x \notin \mathbb{Q}$ !

  Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir NON $\left[P \Longrightarrow Q\right]$, est fausse. Ainsi, $P \Longrightarrow Q$.

## Exercices

**EXERCICE 2.1** Soit $a_1, a_2, \cdots, a_9$ des nombres réels rangés par ordre croissant tels que :

$$a_1 + \cdots + a_9 = 90$$

Montrer qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

**EXERCICE 2.2** Montrer que le nombre réel $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

*Remarque : un nombre réel $r$ est dit rationnel s'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = \dfrac{p}{q}$.*
*Il est dit irrationnel dans le cas contraire.*

## Pour vous aider à démarrer

**EXERCICE 2.1** Justifier qu'il suffit de montrer l'implication suivante, puis montrer la :

$$\big[a_1 + \cdots + a_9 = 90\big] \Longrightarrow \big[a_7 + a_8 + a_9 \geq 30\big]$$

**EXERCICE 2.2** Raisonner par l'absurde.

## Solutions des exercices

**EXERCICE 2.1** Si on montre que la somme des trois plus grands nombres parmi $a_1, \cdots, a_9$ est supérieure ou égale à 30, alors on aura montré qu'il existe bien trois nombres parmi $a_1, \cdots, a_9$ dont la somme est supérieure ou égale à 30. Comme $a_1, \cdots, a_9$ sont rangés par ordre croissant, il suffit alors de montrer l'implication suivante :

$$\underbrace{\big[a_1 + \cdots + a_9 = 90\big]}_{P} \Longrightarrow \underbrace{\big[a_7 + a_8 + a_9 \geq 30\big]}_{Q}$$

Montrons l'implication $P \Longrightarrow Q$ à l'aide d'un raisonnement par contraposée.
Supposons NON $Q$, c'est-à-dire $a_7 + a_8 + a_9 < 30$.
Montrons NON $P$, c'est-à-dire $a_1 + \cdots + a_9 \neq 90$.
Comme $a_1, \cdots, a_9$ sont rangés par ordre croissant, on en déduit les inégalités suivantes :

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30 \quad \text{et aussi} \quad a_4 + a_5 + a_6 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30$$

On en déduit alors : $\underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{< 30} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6}_{< 30} + \underbrace{a_7 + a_8 + a_9}_{< 30} < 90.$

En particulier : $a_1 + \cdots + a_9 \neq 90$.
Conclusion : on a bien montré que NON $Q \Longrightarrow$ NON $P$, donc $P \Longrightarrow Q$.

**EXERCICE 2.2** Supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est rationnel. Cherchons une contradiction.

Comme $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est de plus positif, on peut trouver $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{p}{q}$.
On a les équivalences suivantes :

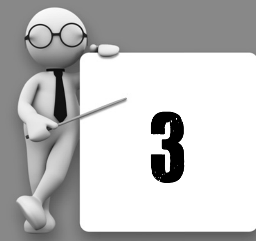
$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow q\ln(2) = p\ln(3) \Longleftrightarrow \ln(2^q) = \ln(3^p) \Longleftrightarrow \underbrace{2^q}_{\substack{\text{entier pair} \\ \text{car } q \in \mathbb{N}^*}} = \underbrace{3^p}_{\substack{\text{entier impair} \\ \text{car } p \in \mathbb{N}}} \qquad \text{Contradiction !}$$

Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est rationnel, est fausse.

Ainsi, le nombre réel $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Solutions

# Raisonner par analyse-synthèse




## Quand on ne sait pas !

**Qu'est-ce qu'un raisonnement par analyse-synthèse ?**

Considérons un problème dont on recherche les solutions qu'on ne connaît pas. On fait alors un raisonnement par analyse-synthèse qui consiste en deux étapes bien distinctes :

- *Analyse.* Lors de cette première étape d'analyse, on suppose l'existence d'une solution au problème posé, puis on recherche des conditions nécessaires sur cette solution.
  - À l'issue de l'analyse, on obtient une liste restreinte de candidats potentiels à être solution au problème posé. Autrement dit, $\boxed{\text{SI}}$ une solution existe, $\boxed{\text{ALORS}}$ elle est à chercher dans cette liste de ce qu'on appelle désormais les candidats solutions.
- *Synthèse.* Lors de cette seconde et dernière étape de synthèse, on vérifie un à un si les candidats solutions trouvés lors de l'analyse sont solution ou pas au problème posé.
  - À l'issue de la synthèse, on obtient un ensemble (qui peut être vide) contenant des solutions au problème posé.

À l'issue de l'analyse ET de la synthèse, on peut conclure que l'ensemble obtenu à l'issue de la synthèse est en fait l'ensemble de toutes les solutions au problème posé.

**Quand utilise-t-on un raisonnement par analyse-synthèse ?**

Typiquement, le raisonnement par analyse-synthèse permet de :

- résoudre des équations (dont l'inconnue peut être un réel, une fonction, . . . ),
- montrer une existence OU une existence et unicité,
- déterminer une condition nécessaire et suffisante.

## Que faire !

- Voici un exemple commenté d'un raisonnement par analyse-synthèse pour résoudre une équation :

**EXEMPLE 1** Résoudre l'équation $\sqrt{x+6} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.