1 Équations du second degré. Signe du trinôme

résumés de cours

exercices

contrôles

corrigés

ÉQUATIONS ; INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

L'équation $ax + b = 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ a pour solution $x = -\frac{b}{a}$.

Le signe de $ax + b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-b / a$	$+\infty$
signe de $ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Pour résoudre des inéquations, il faut se rappeler les deux règles suivantes :

On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre réel **strictement positif** sans changer le sens de l'inégalité.

Il faut changer le sens d'une inégalité si on multiplie ou divise cette inégalité par un même nombre réel **strictement négatif.**

ÉQUATIONS ; INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Le premier membre peut se mettre sous la *forme canonique :*

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

On utilisera principalement la forme suivante :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le *discriminant* de cette équation.

Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution (ou racine).

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution (ou racine) double $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions (ou racines) distinctes :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le signe du « trinôme du second degré » ou polynôme du second degré est donné par la règle suivante :

– si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x ;

– si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ qui l'annule ;

– si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour les valeurs de x à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

On peut résumer ces derniers résultats dans un tableau :

– si $\Delta > 0$ et si $x' < x''$:

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Dans le cas où le trinôme du second degré admet deux solutions, on peut écrire la factorisation suivante : $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$.

Tableaux de variation

cas où $\alpha > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variations de f	$\searrow$	β	$\nearrow$

cas où $\alpha < 0$

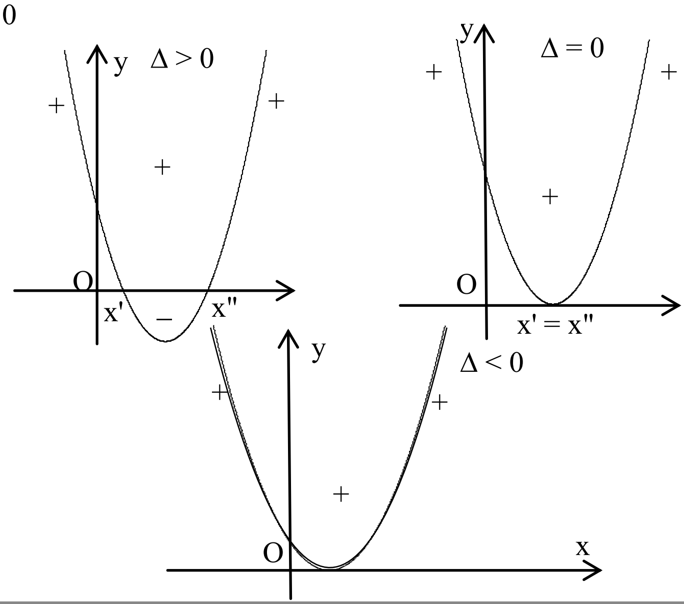
x	$-\infty$	α	$+\infty$
variations de f	$\nearrow$	β	$\searrow$

La courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha, f(\alpha))$ qui admet la droite d'équation $x = \alpha$ pour axe de symétrie.

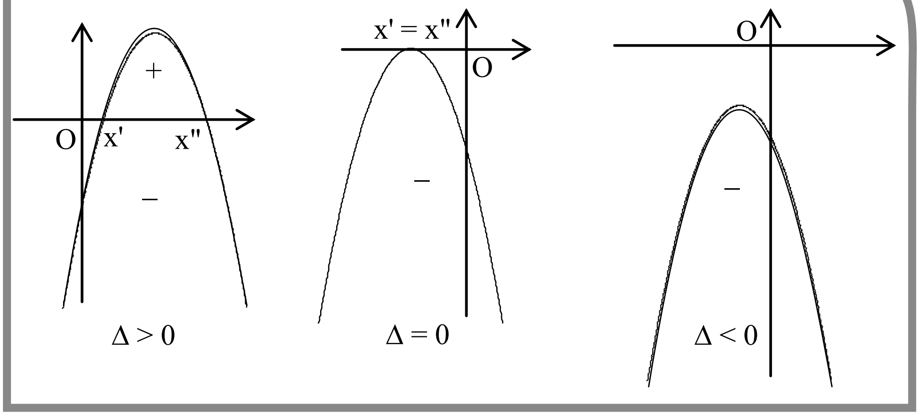
Interprétation graphique du signe de $ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx + c \geq 0$ admet pour solutions les abscisses des points de la parabole situés sur et au-dessus de l'axe des abscisses ; $ax^2 + bx + c < 0$ a pour solutions les abscisses des points de la parabole situés strictement en dessous de l'axe des abscisses.

- $a > 0$



• $a < 0$



✷ Exercice 1 — 15 min

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\frac{2x}{3} - \frac{1-x}{5} = \frac{3}{5} - \frac{x-2}{3}$; $9x^2 - 25 = 0$; $3x^2 + 6x = 0$; $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $2x^2 + 16x - 18 = 0$.

✷ Exercice 2 — 30 min

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$-x^2 + 6x - 4 = 0$; $3x^2 + 18x + 27 = 0$; $4x^2 - 5x + 7 = 0$;

$\frac{2-x}{2x} - \frac{2x+3}{3} = \frac{x}{3}$; $x^4 + 6x^2 - 7 = 0$; $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 4\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + 4 = 0$.

✷ Exercice 3 — 35 min

1. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{3} < x - \frac{1}{6}$;

b) $5x^2 - 20x + 20 \leq 0$;

c) $-x^2 + 9 \geq 0$;

d) $2x^2 - 5x + 3 < 0$.

2. Retrouver graphiquement les résultats des inéquations des questions 1. c) et 1. d).

✷✷ Exercice 4 — 35 min

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

$3x^2 - 2x + 5 < 0$; $-2x^2 + 5x - 8 < 0$; $5x^2 + 7x - 12 < 0$;

$3x^2 + 30x + 75 > 0$; $\dfrac{3x-5}{1-x} \leq 0$; $\dfrac{4}{x} < x$; $x^4 - x^2 - 6 > 0$.

✷ Exercice 5 — 40 min

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = -x^2 + x + 6$.

1. Construire le tableau de variation de f.

2. On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (On pourra prendre pour unités, 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).
Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère.

3. Tracer, la courbe (C) dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

4. Tracer la droite (D) d'équation $y = -4x + 10$.
Résoudre dans ℝ, par le calcul puis graphiquement :

$$f(x) = -4x + 10 \quad \text{puis} \quad f(x) < -4x + 10.$$

✷ Exercice 6 — 10 min

On considère un trapèze isocèle ABCD, de bases [AB] et [CD] tels que :
AB = 3 cm ; CD = 5 cm et de hauteur AH = 4 cm.
Si on augmente les trois longueurs AB, CD et AH de x cm, l'aire du trapèze augmente de 20 cm^2.

Déterminer x.

✷ Exercice 7 — 20 min

On considère un trapèze ABCD dont les bases sont [AB] et [CD] de longueurs AB = 40 et CD = 120.
Les côtés non parallèles ont pour longueurs DA = 26 et BC = 74.
On appelle H et K les projetés respectifs de A et B sur le côté [CD]. On note DH = x et AH = h.

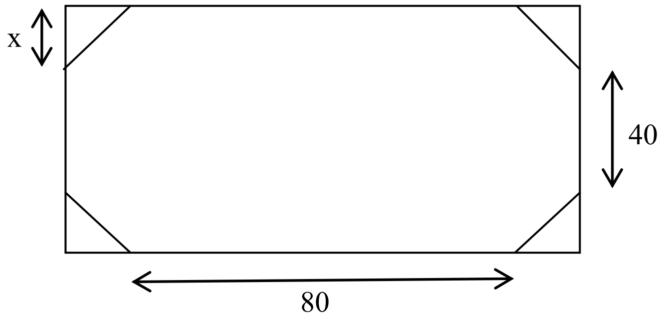
1. En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AHD et BKC, montrer que les nombres réels x et h sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 676 \\ x^2 + h^2 - 160x = -924 \end{cases}$$

2. En déduire les valeurs de x et h.
3. Calculer l'aire du trapèze ABCD.

✷✷ Exercice 8 — 10 min

Pour construire des voies d'accès à un lotissement bâti sur un terrain rectangulaire, on coupe les quatre coins du terrain initial par 4 triangles rectangles isocèles de côté x, comme le montre la figure ci-dessous.
Le terrain restant a pour superficie 4 192 m^2.



1. Déterminer les dimensions du terrain initial.
2. Quelle surface le propriétaire a-t-il perdu ?

✷ Exercice 9 — 15 min

1. Trouver les dimensions d'un rectangle de périmètre 36 cm et d'aire 72 cm^2.
2. Trouver deux entiers relatifs dont la différence est 4 et le produit 221.

✷ Exercice 10 — 15 min

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2(x+1)^2 - 3(y-2)^2 = -4 \\ 5(x+1)^2 + (y-2)^2 = 7 \end{cases}$$

✷ Exercice 11 — 15 min

Soient f et g les deux fonctions définies par :

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4 \text{ et } g(x) = -x^2 + 2x + 1.$$

1. Faire apparaître les courbes représentatives de f et g sur l'écran de la calculatrice avec la fenêtre suivante :

$$-2 \leq x \leq 4 \text{ et } -6 \leq y \leq 6.$$

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer les abscisses des points communs aux deux courbes. On donnera une valeur approchée à 0,01 près.
3. Trouver par le calcul les coordonnées des points d'intersection entre les deux courbes.
4. En déduire la résolution graphique de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

Contrôle

90 min — 20 points

Exercice 1 — 5 points

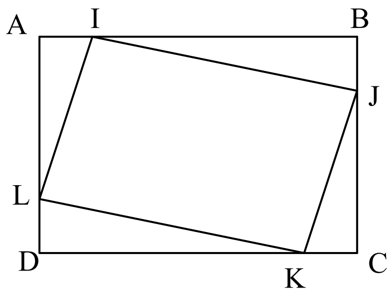
Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$:
$-x^2 + 5x = 0$; $2x^2 - 9x + 9 = 0$; $4x^2 + 2x + 5 = 0$;
$-25x^2 + 10x - 1 \geq 0$; $3x^2 + 4x - 20 < 0$.

Exercice 2 — 3 points

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$:
1. $3x^2 + 4x - 20 < 0$; **2.** $-x^2 + 10x \geq 0$

Exercice 3 — 12 points

ABCD est un rectangle tel que AB = 16 et BC = 12.
Les points I, J, K et L sont placés respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [AD] de telle sorte que : AI = BJ = CK = DL = x.



1. On admet que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme et on désigne par A(x) l'aire du parallélogramme IJKL.
a) Quelles sont les conditions sur x ?
b) Montrer que $A(x) = 2x^2 - 28x + 192$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction A.
Peut-on en déduire une valeur de x pour laquelle l'aire A est minimale ?
3.
a) Pour quelles valeurs de x, l'aire du parallélogramme IJKL est-elle égale à la moitié de celle du rectangle ABCD ?
b) L'aire du parallélogramme IJKL peut-elle être égale au quart de celle du rectangle ABCD ?
4. Pour quelles valeurs de x l'aire du parallélogramme IJKL est-elle comprise entre 94 et 102 ?

Corrigés des exercices

Exercice 1

Pour chacun des exercices, on essaiera d'utiliser la méthode la plus courte.

• $\frac{2x}{3} - \frac{1-x}{5} = \frac{3}{5} - \frac{x-2}{3}$

On réduit les deux membres au même dénominateur 15 et on se rappelle qu'un trait de fraction se comporte comme des parenthèses :

$$\frac{10x - 3(1-x)}{15} = \frac{9 - 5(x-2)}{15} \Leftrightarrow 10x - 3 + 3x = 9 - 5x + 10$$

$$13x + 5x = 19 + 3 \Leftrightarrow 18x = 22 \Leftrightarrow x = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}.$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{11}{9}\right\}}$$

• $9x^2 - 25 = 0$

On reconnaît une différence de deux carrés :

$(3x + 5)(3x - 5) = 0.$

Un produit de facteurs s'annule si et seulement si l'un au moins des facteurs s'annule : $3x + 5 = 0$ ou $3x - 5 = 0$.

$$\boxed{S = \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}}$$

• $3x^2 + 6x = 0$

On remarque le facteur commun $3x$, on peut factoriser :

$3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x + 2 = 0$.

$$\boxed{S = \{0, -2\}}$$

• $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré, on calcule son discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$.

$x' = \frac{5-1}{2\times 2} = \frac{4}{4} = 1$; $x'' = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{S = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}}$$

• $4x^2 - 4x + 1 = 0$

On reconnaît un carré parfait : $(2x - 1)^2 = 0$ soit $2x - 1 = 0$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

• $x^2 - 6x + 8 = 0$

Le discriminant de cette équation du second degré s'écrit :

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 = 2^2$.

Les solutions de l'équation sont $x' = \dfrac{6-2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $x'' = \dfrac{6+2}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

$$\boxed{S = \{2\ ;\ 4\}}$$

Dans une autre méthode, le coefficient de x étant pair, on peut utiliser le début d'un carré parfait :

$x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$ soit $(x-3)^2 - 1 = 0$, on reconnaît une différence de deux carrés $(x-3)^2 - 1^2 = 0$:

$[(x-3)+1][(x-3)-1] = 0 \Leftrightarrow (x-3+1)(x-3-1) = 0$

$(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$.

• $2x^2 + 16x - 18 = 0$

On commence par simplifier par 2 : $x^2 + 8x - 9 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré s'écrit :

$\Delta = (8)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 64 + 36 = 100 = 10^2$.

Les solutions de l'équation sont :

$x' = \dfrac{-8-10}{2} = \dfrac{-18}{2} = -9$ et $x'' = \dfrac{-8+10}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

$$\boxed{S = \{-9\ ;\ 1\}}$$

Exercice 2

• $-x^2 + 6x - 4 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4(-1)(-4) = 36 - 16 = 20 = 4 \times 5$; $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$x' = \dfrac{-6-2\sqrt{5}}{-2} = 3 + \sqrt{5}$; $x'' = \dfrac{-6+2\sqrt{5}}{-2} = 3 - \sqrt{5}$

$$\boxed{S = \left\{3 - \sqrt{5}\ ;\ 3 + \sqrt{5}\right\}}$$

• $3x^2 + 18x + 27 = 0$

On remarque que tous les coefficients sont des multiples de 3, on commence par simplifier cette équation : $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Il s'agit d'un carré parfait car on reconnaît la formule $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$:

$(x+3)^2 = 0$ soit $x = -3$.

$$\boxed{S = \{-3\}}$$