1 Compléments de trigonométrie

FORMULES D'ADDITION

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

FORMULES DE LINÉARISATION

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

✷ Exercice 1 — 10 min

Donner les expressions suivantes en fonction de sin x, sin y, cos x et cos y.

$A = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ $\qquad$ $B = \cos(x-y) + \cos(x+y)$

$C = \sin(x+y) \times \sin(x-y)$ $\qquad$ $D = \cos(x-y) \times \cos(x+y)$

✷ Exercice 2 — 30 min

1. Calculer cos 3x en fonction de cos x, en déduire la résolution dans $[0\,;2\pi]$ de l'équation $8\cos^3 x - 6\cos x - 1 = 0$.

2. Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ les équations et inéquations suivantes :

a) $4\sin x \cos x + 1 = 0$.

b) $2\cos^2 x = 1 + \sin 3x$.

c) $\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✷ Exercice 3 — 10 min

Sachant que $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$, déterminer les valeurs exactes de $\sin \dfrac{\pi}{12}$ et $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

✷ Exercice 4 — 20 min

x est un réel vérifiant $x \in [0\,;2\pi]$.

1. On donne $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, calculer $\cos 2x$, en déduire x.

2. On donne $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, en déduire la valeur de $\cos 2x$ puis celle de $\cos 4x$. Comparer les résultats obtenus. Peut-on alors déterminer x ?

✸✸ Exercice 5 — 30 min

Dans chacun des cas suivants, linéariser $f_i(x)$:

1. $f_1(x) = 3\sin^2 2x$.   **2.** $f_2(x) = 2\cos^4 x$.

3. $f_3(x) = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.   **4.** $f_4(x) = \sin^2 x \cos^2 x$.

✸✸ Exercice 6 — 30 min

On considère la fonction f définie sur $[0\,;2\pi]$ par : $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0\,;2\pi]$, $f(x) = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

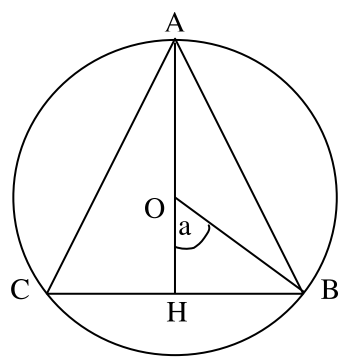
2. Calculer $f'(x)$. Déterminer le signe de la dérivée, en déduire les variations de la fonction f.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse π.

5. Tracer la courbe C représentative de f et la tangente T dans un repère orthogonal.

✸ Exercice 7 — 60 min



Un triangle ABC isocèle, de sommet principal A est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A.

Soit a la mesure en radians de l'angle $\widehat{HOB}$; on suppose $0 \le a \le \dfrac{\pi}{2}$.

1. a) Exprimer BC et AH en fonction de a.

b) En déduire, en fonction de a, l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC.

2. On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $f(a) = \sin a\left(1+\cos a\right)$.

Calculer la dérivée f' de la fonction f.

3. a) Vérifier que $f'(a) = 2\cos^2 a + \cos a - 1 = \cos 2a + \cos a$.

b) En déduire le signe de $f'(a)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ puis sur $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Établir le tableau de variation de la fonction f.

4. Montrer qu'il existe une valeur de a, que l'on déterminera, pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Préciser ce maximum. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

Contrôle

60 min / 20 points

Exercice 1

4 points

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ en utilisant l'égalité $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

3 points

Simplifier les expressions suivantes :

$A(x)=\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x$.

$B(x)=\sin 4x\cos 2x+\sin 2x\cos 4x$.

$C(x)=\frac{\sin 3x}{\sin 2x}-\frac{\cos 3x}{\cos 2x}$ pour $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

Exercice 3

2 points

Linéariser :

$f(x)=2\cos^2 x-3\sin^2 x-4$.

$g(x)=\sin x\cos x-5\cos^2 x$.

Exercice 4

4 points

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$:

1. $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1+\sin x$. **2.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq\frac{1}{4}$.

Exercice 5

7 points

Soit la fonction h définie sur $[0\,;\pi]$ par $h(x)=2\sin^2 x+3$.

1. Montrer que $h'(x)=2\sin 2x$.

2. Déterminer sur $[0\,;\pi]$ le signe de $h'(x)$, en déduire les variations de h.

3. Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction h.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de h au point A d'abscisse $x=\frac{\pi}{6}$.

Corrigé des exercices

Corrigé 1

On utilise les formules d'addition :

• $A = \sin x \cos y + \cos x \sin y - (\sin x \cos y - \cos x \sin y)$

$$\mathbf{A = 2\cos x \sin y}$$

• $B = \cos x \cos y + \sin x \sin y + \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\mathbf{B = 2\cos x \cos y}$$

• $C = (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \times (\sin x \cos y - \cos x \sin y)$

On reconnaît la formule $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\mathbf{C = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y}$$

• $D = (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \times (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$

La même formule donne :

$$\mathbf{D = \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y}$$

Corrigé 2

1. On peut écrire $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

On applique une seconde fois les formules du cours :

$\cos 3x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\sin x \cos x)\sin x$

$\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x$

On remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$:

$\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$

$\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$

$$\boxed{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$$

En utilisant l'égalité trouvée à la question précédente, l'équation devient : $2\cos 3x - 1 = 0$ soit $\cos 3x = \frac{1}{2}$ d'où $\cos 3x = \cos\frac{\pi}{3}$.

Le cours de première sur la résolution d'équations trigonométriques se traduit ici par :

$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

soit : $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les valeurs négatives de k ne conviennent pas car alors, les solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

si $k = 0$, $x = \frac{\pi}{9}$ ou $x = -\frac{\pi}{9}$,

cette dernière valeur n'est pas dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

si $k = 1$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$ ou $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9}$;

si $k = 2$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}$ ou $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{9}$;

si $k = 3$, $x = \frac{\pi}{9} + 2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi = \frac{17\pi}{9}$, la première valeur ne convient pas.

Avec des valeurs plus grandes de k, les solutions ne sont plus dans $[0\,;2\pi]$.

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}\right\}}$$

2. a) On utilise la formule $2\sin x \cos x = \sin 2x$, l'équation devient :

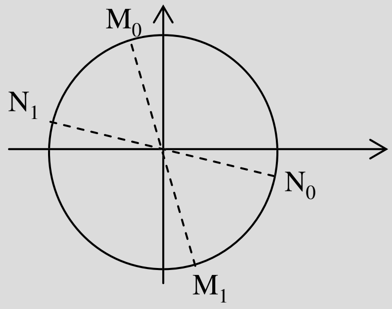
$2\sin 2x + 1 = 0$ soit $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Le cours sur les équations trigonométriques se traduit par :

$2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

soit : $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$, l'équation admet 4 solutions que l'on peut déterminer à l'aide des quatre points images de ces solutions sur un cercle trigonométrique :



$$\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}}$$

b) L'équation peut s'écrire :
$2\cos^2 x - 1 = \sin 3x$ soit $\cos 2x = \sin 3x$.
On utilise une formule sur les arcs associés de première pour transformer le sinus du second membre en cosinus :

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$2x = \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

$$x = \frac{\pi}{10}\ ;\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\ ;\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5}\ ;\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5}\ ;\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{5}$$

$\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{10}$ sont deux solutions confondues.

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{10}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{9\pi}{10}\ ;\ \frac{13\pi}{10}\ ;\ \frac{17\pi}{10}\right\}}$$

Dans une seconde méthode, on aurait pu transformer le cosinus du premier membre en sinus soit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 3x \text{ ce qui se traduit par :}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - 2x = \pi - 3x + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

On retrouve les équations de la première méthode.

c) On reconnaît dans le premier membre le développement de sin (a – b) avec a = 2x et b = x.
L'inéquation devient :

$$\sin(2x - x) < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ soit } \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$