Compléments sur les suites 1

Compétences

- ▷ Savoir montrer qu'une suite est négligeable devant une autre
  Exercices 1 à 4.
- ▷ Savoir trouver un équivalent à l'aide des opérations usuelles ou des équivalents classiques
  Exercices 5 à 9.
- ▷ Savoir trouver un équivalent par encadrement
  Exercices 10 à 12.
- ▷ Savoir trouver un équivalent d'une composée par une fonction usuelle
  Exercices 13 à 17.
- ▷ Savoir montrer qu'une suite définie par récurrence est bien définie
  Exercices 18 à 19.
- ▷ Savoir déterminer la monotonie d'une suite
  Exercices 20 à 26.
- ▷ Savoir justifier la convergence d'une suite définie par récurrence
  Exercices 27 à 30.

Coup d'œil sur le chapitre

Ce premier chapitre permet de manipuler l'outil de comparaison des suites en termes de négligeabilité et d'équivalence. Cet outil est particulièrement efficace pour l'étude des séries et des intégrales généralisées (voir chapitre 2 et chapitre 7) ; il permettra d'affiner et de compléter l'étude des variables aléatoires discrètes. Les théorèmes de caractérisation de la négligeabilité et de l'équivalence sont à maîtriser parfaitement ainsi que les exemples fondamentaux de négligeabilité et d'équivalence. On fera bien attention à ne pas commettre les erreurs classiques du style « une suite non nulle équivalente à 0 » et on manipulera avec précaution l'équivalent d'une composée par une fonction usuelle !
Les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ont un plan d'étude spécifique.
Ce genre d'exercice est souvent associé à des raisonnements par récurrence qu'il faut maîtriser.
Les théorèmes vus en première année (théorème de convergence monotone, théorème de la bijection, inégalités des accroissements finis) sont réinvestis dans les exercices et complétés par le théorème du point fixe. La continuité de la fonction f associée, joue une part très importante dans ce chapitre.
Nous retrouverons l'utilisation des suites en algèbre linéaire lors des calculs de puissance de matrices. Les domaines d'application sont donc très variés ; chaque école propose toujours un exercice sur ce thème des suites ce qui donne à ce premier chapitre tout son importance !
Étant donné que les équivalents ou les négligeabilités obtenus se font au voisinage de $+\infty$, on notera par commodité, $u_n = o(v_n)$ pour $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ pour $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Le saviez-vous ?

Le linguiste et philologue américain George Kingsley Zipf (1902-1950) s'est amusé à compter le nombre d'apparitions de chaque mot dans l'énorme roman *Ulysse* de l'écrivain irlandais James Joyce. Il classe alors les mots par nombre décroissant d'apparitions, il obtient une suite décroissante (u_n) où u_n désigne le nombre d'occurrence du n-ième mot le plus utilisé. Il s'aperçut que la suite (nu_n) était approximativement constante. Ainsi, le mot le plus utilisé apparaissait 8000 fois, le dixième ne se retrouvait qu'environ 800 fois et le centième n'était présent qu'à peu près 80 fois.
Zipf essaya alors de vérifier cette propriété pour d'autres ouvrages et dans d'autres langues. Il s'aperçut que cette propriété ne se vérifie pas de manière satisfaisante dans tous les cas. Cependant on la retrouve si, au lieu de multiplier le nombre P d'occurrences par le rang n, on le multiplie par na, où a est un réel un peu plus grand que 1, le nombre a pouvant être différent d'un texte à l'autre. Malgré cela, il remarque que les mots les plus fréquents et les mots les plus rares s'écartent souvent du résultat attendu.

Énoncé des exercices

Montrer qu'une suite est négligeable devant une autre

Exercice 1.

Montrer que $\dfrac{\ln n}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2.

Préciser pour chacune des comparaisons suivantes, au voisinage de $+\infty$, si celle-ci est vraie ou fausse.

$n^2 + e^{-n} = o(n)$, $\quad n - 2 = o(n)$, $\quad \ln n = o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 3.

1. À quelle condition sur x, a-t-on :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, n^\alpha = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$?

2. En déduire que pour $q \in \left]-1, 1\right[$ et pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > 2$, $n^p q^n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4.

Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité au voisinage de $+\infty$:

1. $\dfrac{1}{n}$, $\quad \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $\quad \dfrac{\ln n}{n}$, $\quad \dfrac{(\ln n)^2}{n}$, $\quad \dfrac{1}{\ln n}$.
2. n, $\quad n^2$, $\quad n\sqrt{n}$, $\quad \sqrt{n}\ln n$, $\quad n^2 e^{-n}$, $\quad \dfrac{n^2}{\ln n}$.

Donner un équivalent à l'aide des opérations usuelles et des équivalents classiques

Exercice 5.

Préciser pour chacune des comparaisons suivantes, au voisinage de $+\infty$, si celle-ci est vraie ou fausse.

$n^2 + n \sim n$, $\quad \dfrac{e^n}{n+3} \sim e^n$, $\quad \ln n + n \sim n$, $\quad \dfrac{e^n}{n^2+1} \sim \dfrac{e^n}{n^2}$.

Exercice 6.

Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ à chacune des suites ci-dessous :

1. pour $n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2, u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$.
2. pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln(n+1) - \ln n$.
3. pour $n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
4. pour $n \in \mathbb{N}^*, t_n = \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout entier naturel k, pour tout entier naturel n tel que : $n \geqslant k$, on a, au voisinage de $+\infty$: $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$.
2. Soit k un entier naturel donné, en déduire la limite de $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.

Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ à chacune des suites ci-dessous et en donner leur limite en $+\infty$:

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2+7}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2-n+1}}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{x^n+y^n}{x^n-y^n}$, où, $0 < x < y$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \frac{n^3(\ln(n+1)-\ln n)}{\sqrt{n^3+1}}$.

Exercice 9.

Étudier la limite en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^{\frac{2}{5}}\left(1-e^{\frac{-1}{n}}\right)}{7-4\ln n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, v_n = n^2 \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$.

Donner un équivalent par encadrement

Exercice 10.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$, vérifiant : $2n^3 - n\ln n \leqslant u_n \leqslant 2n^3 + n\sqrt{n} + 6$. Donner la limite de u ainsi qu'un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 11.

On suppose qu'une suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$, vérifie l'encadrement suivant :

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

Établir que $S_n \sim \ln(\ln n)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12.

On suppose qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$, vérifie l'encadrement suivant :

$$n\ln n \leqslant u_n \leqslant 2n\ln n.$$

Donner un équivalent de $\ln u_n$ au voisinage de $+\infty$.

D'après EDHEC

Donner un équivalent d'une composée par une fonction usuelle

Exercice 13.

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que $|u_n| \sim |v_n|$.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \sim v_n$. Si de plus à partir d'un certain rang, $u_n > 0, v_n > 0$, montrer que : $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 14.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les suites définies par $u_n = 1 + \dfrac{2}{n^2}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^3}$.

Justifier que $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$. A-t-on $\ln u_n$ équivalent à $\ln v_n$ au voisinage de $+\infty$?

Exercice 15.

Pour tout entier naturel n non nul et différent de 1, on considère $u_n = n^2 - n$. Donner un équivalent de $\ln u_n$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16. $(\star)$

Pour tout entier naturel n non nul, on considère $u_n = 2 - e^{-\frac{1}{n^2}}$. Donner un équivalent de $\ln u_n$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 17. ($\star\star$)

Donner un équivalent de $v_n = e^{n^2 e^{\frac{1}{n^2}}}$ au voisinage de $+\infty$.

Montrer qu'une suite définie par récurrence est bien définie

Exercice 18.

Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n - 2}$. La suite u est-elle bien définie ?

Exercice 19.

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + \dfrac{2}{3u_n}$. La suite u est-elle bien définie pour tout entier naturel n ? Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Déterminer la monotonie d'une suite

Exercice 20.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

   Étudier la monotonie de la suite.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$.

   Étudier la monotonie de cette suite.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dbinom{n}{k}$.

   Montrer que la suite est croissante.

Exercice 21.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dbinom{2n}{n}$.

Étudier la monotonie de la suite.

Exercice 22.

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. La suite u est-elle bien définie pour tout entier naturel n ?
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
2. Étudier le sens de variation de $f(x) = \sqrt{x+3}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Donner le sens de variation de la suite u.

Exercice 23.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1/2]$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 24. ($\star\star$)

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{u_n}$.

1. La suite u est-elle bien définie pour tout entier naturel n ? Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Étudier le sens de variation de $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier le sens de variation de ces deux sous-suites.
   On montrera que $v_{n+1} = f \circ f\,(v_n)$ et que $w_{n+1} = f \circ f\,(w_n)$.

Exercice 25. ($\star$)

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution, que l'on notera u_n.
2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie.

Exercice 26. ($\star$)

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n \cdot \ln x$$

1. a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $1 < u_n < e$.
   b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

D'après EDHEC 1997

Justifier la convergence d'une suite définie par récurrence

Exercice 27.

On considère de nouveau la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
En reprenant les résultats obtenus à l'exercice 23, en déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

Exercice 28.

Soit la suite u définie à l'exercice 24, par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{u_n}$.
On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
En utilisant les résultats obtenus dans cet exercice 24, étudier la convergence de ces deux sous-suites et conclure sur la convergence de la suite u.

Exercice 29.

On reprend l'exercice 25. On a montré (par étude de la fonction $f : x \mapsto e^x + x$) que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $e^x + x - n = 0$ admettait une unique solution, notée u_n et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était croissante.

1. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \ln n$ puis que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ln n - 1$.
3. En déduire un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

Approfondissement

Exercice 30.

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln x.$$

Partie I : Étude de la fonction f.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On note $\ln 2 \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite.
On pose : $u_0 = 4 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.