

## TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE	III
AVANT-PROPOS	V
REMERCIEMENTS	XII
À PROPOS DE ALAN TURING	XIII

### CHAPITRE I

#### Symbolique paléolithique et machine de Turing

I-1. Symbolique paléolithique	1
I-1.1. La représentation animale.	1
I-1.2. La représentation de l'homme.	2
I-1.3. Les signes.	3
I-1.4. L'industrie lithique.	4
I-1.5. Les thèmes.	5
I-2. Un calendrier vieux de 300 siècles.	7
I-3. La notion de nombre.	11
I-4. La notion de machine de Turing.	16
I-5. La notion d'algorithme.	18
I-6. La notion d'alphabet.	21
I-7. L'algorithme d'Euclide dans un alphabet.	24

### CHAPITRE II

#### Machine de Turing : généralités et utilitaires

II-1. Définition d'une machine de Turing.	27
II-2. Fonctionnement, comportement, notations. Les machines $T_{\square D}$ et $T_{\square G}$ , $T_{ID}$ et $T_{IG}$ .	29
II-3. Composition de machines. Mise en série.	34
II-4. La notion de programme.	36
II-5. Une machine de Turing chercheuse de traits $T_{I?}$ .	38
II-6. Deux machines de Turing à copier : en aval $T_{\bar{C}}$ et en amont $T_{\bar{C}}$ .	40
II-7. Machines de Turing de décalage droit $T_{\bar{D}}$ et gauche $T_{\bar{D}}$ .	45
II-8. Machines de Turing $T_{\bar{G}}$ et $T_{\bar{G}}$ de glissement à gauche et à droite avec surimpression d'un registre sur un autre.	46
II-9. Une machine de permutation $T_p$ .	49
II-10. Machine de tassement sur repère à gauche $T_{\bar{T}}$ et sur repère à droite $T_{\bar{T}}$ .	50
II-11. Une machine d'insertion $T_{IS}$ .	51

## CHAPITRE III

### L'arithmétique des bâtons

III-1.	Le schème successeur $\mathfrak{S}_c$ , la fonction successeur $S_c$ et la machine de Turing $T_{S_c}$ .	54
III-2.	Le schème prédécesseur $\mathfrak{P}_c$ , la fonction prédécesseur $P_c$ et la machine de Turing $T_{P_c}$ .	56
III-3.	Les schèmes zéros $\mathfrak{Z}^{(k)}$ et les fonctions $Z^{(k)}$ . Les schèmes i-ème projection $\mathfrak{P}_i^{(k)}$ et les fonctions i-ème projection $P_i^{(k)}$ .	57
III-4.	La fonction addition et l'opération d'itération. La machine $T_A$ .	60
III-5.	La fonction multiplication et l'opération d'itération. La machine de Turing $T_M$ .	64
III-6.	La fonction différence positive et l'opération d'itération. La machine de Turing $T_{dp}$ .	65
III-7.	La fonction valeur absolue $V_{ a }$ .	67
III-8.	La fonction division entière et le processus d'itération. La machine de Turing $T_{N/M}$ .	68
III-8.1.	Décrémentation itérée.	68
III-8.2.	Incrémentation itérée.	71
III-9.	La fonction pgcd. Deux machines de Turing $T_{pgcd}$ .	75
III-9.1.	Méthode de la division euclidienne.	75
III-9.2.	Méthode des soustractions alternées.	76
III-10.	La fonction racine carrée. La machine de Turing $T_{\sqrt{N}}$ .	81

## CHAPITRE IV

### Calculabilité et récursivité primitive

IV-1.	Fonctions Turing-calculables.	85
IV-1.1.	La composition.	86
IV-1.2.	La récurrence simple.	87
IV-1.3.	La récurrence simultanée.	92
IV-1.4.	La minimalisation.	97
IV-2.	Fonctions récursives primitives. Relations et opérateurs récursifs primitifs.	101
IV-2.1.	Fonctions récursives primitives.	101
IV-2.2.	Opérateurs récursifs primitifs.	102
IV-2.3.	Opérateurs récursifs primitifs et relations récursives primitives.	104
IV-2.3.1.	Opérateur de substitution.	105
IV-2.3.2.	Opérateur de minimalisation bornée.	105
IV-2.3.3.	Opération de définition par cas.	105
IV-2.3.4.	Opérateurs connecteurs logiques.	106
IV-2.3.5.	Opérateurs de quantification bornée.	106

## CHAPITRE V

### La fonction d'Ackermann

V-1.	Définition.	107
V-2.	La fonction d'Ackermann est $\mathfrak{T}$ -calculable.	108

V-2.1. Méthode par construction d'une table.	108
V-2.2. Méthode à deux piles.	115
V-2.3. En marge : méthode à une pile appliquée au jeu de la Tour d'Hanoï.	119
V-3. La fonction d'Ackermann, quoique récursive, n'est pas récursive primitive.	126
V-4. Infini et finitude des algorithmes.	131

## CHAPITRE VI

### Turing-calculabilité et récursivité non primitive

VI-1. Fonctions et relations récursives.	133
VI-2. Ensembles récursifs.	134
VI-3. Fonctions récursivement énumérables.	139
VI-4. Numérotation des machines de Turing.	144
VI-5. Les fonctions $\mathcal{T}$ -calculables sont récursives.	146
VI-5.1. Les codages.	147
VI-5.1.1. Codage du schème fonctionnel.	147
VI-5.1.2. Codage du ruban et des configurations.	150
VI-5.2. Les fonctions.	151
VI-5.2.1. La fonction Ent(X).	151
VI-5.2.2. La fonction Svt(a, x).	152
VI-5.2.3. La fonction Res(a, b, x).	154
VI-5.2.4. Les fonctions Fin(a, X, y) et Stp(X).	154
VI-5.2.5. La fonction Ext(a, y).	155
VI-6. La thèse de Church-Turing.	156
VI-7. Aperçu succinct du $\lambda$ -calcul.	160
VI-7.1. Quelques définitions.	160
VI-7.2. Représentation des fonctions.	161

## CHAPITRE VII

### Indécidabilité

VII-1. Machine de Turing et autodescription.	165
VII-2. Machine de Turing universelle.	178
VII-3. Le Jeu des Castors Affairés et le problème de l'arrêt.	182
VII-4. L'indécidabilité de l'arrêt d'une machine de Turing.	188
VII-5. Réductibilité du problème de l'arrêt des machines de Turing à des problèmes indécidables.	191
VII-5.1. Le problème de correspondance de Post.	191
VII-5.2. La traductibilité d'un mot en un autre.	194
VII-6. Incomplétude et indécidabilité.	197

## CHAPITRE VIII

### Vers les automates cellulaires

VIII-1. Mutation vers les automates cellulaires.	201
VIII-1.1. Premier exemple : voisinage de deux cellules, cellules à deux états.	201

<b>VIII-1.2.</b> Deuxième exemple : voisinage de trois cellules, cellules à deux états.	206
<b>VIII-1.3.</b> Troisième exemple : voisinage de trois cellules, cellules à trois états.	208
<b>VIII-2.</b> Machines à rubans ampliatifs : une histoire de triangles.	210
<b>VIII-2.1.</b> Un triangle de Sierpinski.	210
<b>VIII-2.2.</b> Notion d'homothétie interne et distance de Hausdorff.	211
<b>VIII-2.3.</b> Dimension de Hausdorff et caractère fractal du triangle de Sierpinski.	214
<b>VIII-2.4.</b> Coordonnées binaires et triangle de Sierpinski.	216
<b>VIII-2.5.</b> Triangle de Pascal et triangle de Sierpinski.	218
<b>VIII-2.6.</b> Hasard et triangle de Sierpinski.	221
<b>VIII-2.7.</b> Le Jeu de la Tour d'Hanoï et le triangle de Sierpinski.	223
<b>VIII-2.8.</b> Une certaine marche du Roi et un triangle de Sierpinski.	226
<b>VIII-2.9.</b> Du triangle de Pascal au triangle de Sierpinski.	228
<b>VIII-3.</b> Incursion dans une galerie de tapisseries. Classification de Stephen Wolfram.	232
<b>VIII-4.</b> Comment un automate cellulaire définit une machine de Turing	237

## CHAPITRE IX

### Les automates cellulaires : caractérisation

<b>IX-1.</b> Généralités.	245
<b>IX-2.</b> Automates cellulaires unidimensionnels.	247
<b>IX-2.1.</b> Caractérisation polynômiale.	247
<b>IX-2.2.</b> Caractérisation matricielle.	253
<b>IX-2.2.1.</b> Matrice caractéristique.	253
<b>IX-2.2.2.</b> Condition d'existence d'un groupe cyclique.	254
<b>IX-2.2.3.</b> Automate cellulaire complémenté	256
<b>IX-2.2.4.</b> Structure de cycle.	257
<b>IX-3.</b> Automates cellulaires bidimensionnels.	262
<b>IX-3.1.</b> Automate cellulaire 2D cyclique.	265
<b>IX-3.2.</b> Longueur de cycle.	268

## CHAPITRE X

### Voisinage de von Neumann

<b>X-1.</b> Les automates linéaires.	275
<b>X-2.</b> Automate de Banks et propagation de signaux.	278
<b>X-3.</b> Automate Tartan.	284
<b>X-4.</b> Mémoire du passé. Formes pleines et contours.	286
<b>X-5.</b> Mémoire d'avenir. Réversibilité du temps.	290
<b>X-6.</b> Membrane de protection. Effet tunnel.	301
<b>X-7.</b> Bruit de fond pseudo-aléatoire.	305
<b>X-8.</b> Phénomène de diffusion et processus de Poisson.	308

## CHAPITRE XI

### Le voisinage de Moore

<b>XI-1.</b> La règle « Un sur huit ».	313
----------------------------------------	-----

<b>XI-2.</b>	Le Jeu de la Vie.	314
<b>XI-2.1.</b>	Zoologie.	317
<b>XI-2.1.1.</b>	Des colonies stables.	317
<b>XI-2.1.2.</b>	Des oscillateurs.	318
<b>XI-2.1.3.</b>	Vaisseaux et puffeurs.	319
<b>XI-2.1.4.</b>	Fusées.	323
<b>XI-2.1.5.</b>	Les « Jardins de l'Éden ».	324
<b>XI-2.2.</b>	Automate de Conway et portes logiques.	325
<b>XI-2.2.1.</b>	Glissades et collisions.	325
<b>XI-2.2.2.</b>	Géniteurs et générateurs de glisseurs. Canons et cadences de tir.	330
<b>XI-2.2.3.</b>	Portes logiques.	338
<b>XI-2.2.4.</b>	Le Jeu de la Vie et l'universalité.	343
<b>XI-2.2.5.</b>	Biojeu.	343
<b>XI-3.</b>	L'automate cellulaire de Silverman à quatre états. Monde câblé et portes électroniques.	344
<b>XI-3.1.</b>	Diode.	345
<b>XI-3.2.</b>	Porte OU. Horloge.	346
<b>XI-3.3.</b>	Porte NON.	347
<b>XI-3.4.</b>	Porte OU exclusif et porte ET.	348
<b>XI-3.5.</b>	Unité de mémoire.	350
<b>XI-3.6.</b>	Compteur binaire sur trois bits.	350
<b>XI-3.7.</b>	Le Monde câblé et l'universalité	351

## CHAPITRE XII

### Le voisinage de Margolus

<b>XII-1.</b>	Définitions et premiers exemples.	353
<b>XII-1.1.</b>	Le « Myosotis » et la réversibilité.	354
<b>XII-1.2.</b>	La fuite des éclopés.	357
<b>XII-2.</b>	Le monde de la logique câblée.	358
<b>XII-2.1.</b>	Génération et extinction de signaux à l'extrémité d'un fil conducteur.	360
<b>XII-2.2.</b>	Propagation d'un signal le long d'un fil. Porte NON.	361
<b>XII-2.3.</b>	Propagation des signaux lors d'un branchement. Porte ET.	363
<b>XII-2.4.</b>	Croisement de fils.	366
<b>XII-2.5.</b>	Générateurs d'impulsions.	367
<b>XII-2.6.</b>	Exemples de circuits.	368
<b>XII-3.</b>	Le monde des particules.	372
<b>XII-3.1.</b>	Particules en mouvement. Mécanisme de collision.	372
<b>XII-3.1.1.</b>	Déplacements diagonaux. Modèle du gaz HPP.	372
<b>XII-3.1.2.</b>	Déplacements longitudinaux. Modèle du gaz TM.	377
<b>XII-3.2.</b>	Simulation de phénomènes physiques.	379
<b>XII-3.2.1.</b>	Modèle de diffusion 2D à processus stochastique.	379
<b>XII-3.2.2.</b>	Modèle de diffusion 2D dans le vide.	382
<b>XII-3.2.3.</b>	Modèle d'agrégation par diffusion limitée.	384
<b>XII-3.2.4.</b>	Modèles d'ondes acoustiques et d'ondes lumineuses.	387
<b>XII-4.</b>	Le monde du billard.	390
<b>XII-4.1.</b>	Le modèle Fredkin-Toffoli sur automate cellulaire.	391
<b>XII-4.2.</b>	Exemples d'éléments de circuit.	394
<b>XII-4.3.</b>	Le modèle à billes de billard, la réversibilité et la logique conservatrice.	396

## CHAPITRE XIII

### Le monde des fourmis

<b>XIII-1.</b> Déterminisme et chaos.	403
<b>XIII-2.</b> Fourmi de Langton.	406
<b>XIII-3.</b> Fourmis généralisées de Langton et/ou Tur-mites.	408
<b>XIII-4.</b> Fourmis ouvrières, ménagères accomplies.	420
<b>XIII-5.</b> Les fourmis architectes de Turing.	423
<b>XIII-6.</b> Fourmis agricoles et chasseresses.	424
<b>XIII-7.</b> La leçon des fourmis.	428

## CHAPITRE XIV

### Autoréplication et vie artificielle

<b>XIV-1.</b> Vie naturelle et vie artificielle.	429
<b>XIV-1.1.</b> Qu'est-ce que la vie ?	429
<b>XIV-1.1.1.</b> La reproduction chez les êtres vivants.	430
<b>XIV-1.1.2.</b> L'évolution dans le monde vivant.	431
<b>XIV-1.2.</b> Qu'en est-il de la vie artificielle ?	432
<b>XIV-1.2.1.</b> L'imitation mécanique de la vie.	432
<b>XIV-1.2.2.</b> L'imitation biochimique de la vie.	432
<b>XIV-1.2.3.</b> L'imitation de la logique du vivant.	433
<b>XIV-2.</b> L'autoréplication et l'automate autoréplicateur de John von Neumann.	438
<b>XIV-3.</b> La boucle de Langton.	441
<b>XIV-3.1.</b> Propagation du signal.	441
<b>XIV-3.2.</b> Dédoublage du signal.	443
<b>XIV-3.3.</b> Introduction d'une fibre de sortie et son extension.	445
<b>XIV-3.4.</b> Enroulement de la fibre de sortie.	447
<b>XIV-3.5.</b> Fermeture de la boucle et coupure du cordon ombilical.	449
<b>XIV-3.6.</b> Création de fibres de sortie.	450
<b>XIV-3.7.</b> Rétraction de fibre et agonie de la boucle.	451
<b>XIV-4.</b> La boucle de John Byl.	453
<b>XIV-5.</b> Boucles de James Reggia.	457
<b>XIV-6.</b> Un ver et une boucle parmi d'autres.	460
<b>XIV-7.</b> La ronde du Petit Poucet.	463

## CONCLUSION

<b>Conclusion</b>	473
-------------------	-----

## BIBLIOGRAPHIE

<b>Bibliographie</b>	479
----------------------	-----