

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|-------------------------|------|
| PRÉFACE | III |
| AVANT-PROPOS | V |
| REMERCIEMENTS | XII |
| À PROPOS DE ALAN TURING | XIII |

CHAPITRE I

Symbolique paléolithique et machine de Turing

| | |
|---|----|
| I-1. Symbolique paléolithique | 1 |
| I-1.1. La représentation animale. | 1 |
| I-1.2. La représentation de l'homme. | 2 |
| I-1.3. Les signes. | 3 |
| I-1.4. L'industrie lithique. | 4 |
| I-1.5. Les thèmes. | 5 |
| I-2. Un calendrier vieux de 300 siècles. | 7 |
| I-3. La notion de nombre. | 11 |
| I-4. La notion de machine de Turing. | 16 |
| I-5. La notion d'algorithme. | 18 |
| I-6. La notion d'alphabet. | 21 |
| I-7. L'algorithme d'Euclide dans un alphabet. | 24 |

CHAPITRE II

Machine de Turing : généralités et utilitaires

| | |
|---|----|
| II-1. Définition d'une machine de Turing. | 27 |
| II-2. Fonctionnement, comportement, notations. Les machines $T_{\square D}$ et $T_{\square G}$, T_{ID} et T_{IG} . | 29 |
| II-3. Composition de machines. Mise en série. | 34 |
| II-4. La notion de programme. | 36 |
| II-5. Une machine de Turing chercheuse de traits $T_{I?}$. | 38 |
| II-6. Deux machines de Turing à copier : en aval $T_{\bar{C}}$ et en amont $T_{\bar{C}}$. | 40 |
| II-7. Machines de Turing de décalage droit $T_{\bar{D}}$ et gauche $T_{\bar{D}}$. | 45 |
| II-8. Machines de Turing $T_{\bar{G}}$ et $T_{\bar{G}}$ de glissement à gauche et à droite avec surimpression d'un registre sur un autre. | 46 |
| II-9. Une machine de permutation T_p . | 49 |
| II-10. Machine de tassement sur repère à gauche $T_{\bar{T}}$ et sur repère à droite $T_{\bar{T}}$. | 50 |
| II-11. Une machine d'insertion T_{IS} . | 51 |

CHAPITRE III

L'arithmétique des bâtons

| | | |
|----------|---|----|
| III-1. | Le schème successeur \mathfrak{S}_c , la fonction successeur S_c et la machine de Turing T_{S_c} . | 54 |
| III-2. | Le schème prédécesseur \mathfrak{P}_c , la fonction prédécesseur P_c et la machine de Turing T_{P_c} . | 56 |
| III-3. | Les schèmes zéros $\mathfrak{Z}^{(k)}$ et les fonctions $Z^{(k)}$. Les schèmes i-ème projection $\mathfrak{P}_i^{(k)}$ et les fonctions i-ème projection $P_i^{(k)}$. | 57 |
| III-4. | La fonction addition et l'opération d'itération. La machine T_A . | 60 |
| III-5. | La fonction multiplication et l'opération d'itération. La machine de Turing T_M . | 64 |
| III-6. | La fonction différence positive et l'opération d'itération. La machine de Turing T_{dp} . | 65 |
| III-7. | La fonction valeur absolue $V_{ a }$. | 67 |
| III-8. | La fonction division entière et le processus d'itération. La machine de Turing $T_{N/M}$. | 68 |
| III-8.1. | Décrémentation itérée. | 68 |
| III-8.2. | Incrémentation itérée. | 71 |
| III-9. | La fonction pgcd. Deux machines de Turing T_{pgcd} . | 75 |
| III-9.1. | Méthode de la division euclidienne. | 75 |
| III-9.2. | Méthode des soustractions alternées. | 76 |
| III-10. | La fonction racine carrée. La machine de Turing $T_{\sqrt{N}}$. | 81 |

CHAPITRE IV

Calculabilité et récursivité primitive

| | | |
|-----------|---|-----|
| IV-1. | Fonctions Turing-calculables. | 85 |
| IV-1.1. | La composition. | 86 |
| IV-1.2. | La récurrence simple. | 87 |
| IV-1.3. | La récurrence simultanée. | 92 |
| IV-1.4. | La minimalisation. | 97 |
| IV-2. | Fonctions récursives primitives. Relations et opérateurs récursifs primitifs. | 101 |
| IV-2.1. | Fonctions récursives primitives. | 101 |
| IV-2.2. | Opérateurs récursifs primitifs. | 102 |
| IV-2.3. | Opérateurs récursifs primitifs et relations récursives primitives. | 104 |
| IV-2.3.1. | Opérateur de substitution. | 105 |
| IV-2.3.2. | Opérateur de minimalisation bornée. | 105 |
| IV-2.3.3. | Opération de définition par cas. | 105 |
| IV-2.3.4. | Opérateurs connecteurs logiques. | 106 |
| IV-2.3.5. | Opérateurs de quantification bornée. | 106 |

CHAPITRE V

La fonction d'Ackermann

| | | |
|------|---|-----|
| V-1. | Définition. | 107 |
| V-2. | La fonction d'Ackermann est \mathfrak{T} -calculable. | 108 |

| | |
|---|-----|
| V-2.1. Méthode par construction d'une table. | 108 |
| V-2.2. Méthode à deux piles. | 115 |
| V-2.3. En marge : méthode à une pile appliquée au jeu de la Tour d'Hanoï. | 119 |
| V-3. La fonction d'Ackermann, quoique récursive, n'est pas récursive primitive. | 126 |
| V-4. Infini et finitude des algorithmes. | 131 |

CHAPITRE VI

Turing-calculabilité et récursivité non primitive

| | |
|---|-----|
| VI-1. Fonctions et relations récursives. | 133 |
| VI-2. Ensembles récursifs. | 134 |
| VI-3. Fonctions récursivement énumérables. | 139 |
| VI-4. Numérotation des machines de Turing. | 144 |
| VI-5. Les fonctions \mathcal{T} -calculables sont récursives. | 146 |
| VI-5.1. Les codages. | 147 |
| VI-5.1.1. Codage du schème fonctionnel. | 147 |
| VI-5.1.2. Codage du ruban et des configurations. | 150 |
| VI-5.2. Les fonctions. | 151 |
| VI-5.2.1. La fonction Ent(X). | 151 |
| VI-5.2.2. La fonction Svt(a, x). | 152 |
| VI-5.2.3. La fonction Res(a, b, x). | 154 |
| VI-5.2.4. Les fonctions Fin(a, X, y) et Stp(X). | 154 |
| VI-5.2.5. La fonction Ext(a, y). | 155 |
| VI-6. La thèse de Church-Turing. | 156 |
| VI-7. Aperçu succinct du λ -calcul. | 160 |
| VI-7.1. Quelques définitions. | 160 |
| VI-7.2. Représentation des fonctions. | 161 |

CHAPITRE VII

Indécidabilité

| | |
|--|-----|
| VII-1. Machine de Turing et autodescription. | 165 |
| VII-2. Machine de Turing universelle. | 178 |
| VII-3. Le Jeu des Castors Affairés et le problème de l'arrêt. | 182 |
| VII-4. L'indécidabilité de l'arrêt d'une machine de Turing. | 188 |
| VII-5. Réductibilité du problème de l'arrêt des machines de Turing à des problèmes indécidables. | 191 |
| VII-5.1. Le problème de correspondance de Post. | 191 |
| VII-5.2. La traductibilité d'un mot en un autre. | 194 |
| VII-6. Incomplétude et indécidabilité. | 197 |

CHAPITRE VIII

Vers les automates cellulaires

| | |
|--|-----|
| VIII-1. Mutation vers les automates cellulaires. | 201 |
| VIII-1.1. Premier exemple : voisinage de deux cellules, cellules à deux états. | 201 |

| | |
|--|-----|
| VIII-1.2. Deuxième exemple : voisinage de trois cellules, cellules à deux états. | 206 |
| VIII-1.3. Troisième exemple : voisinage de trois cellules, cellules à trois états. | 208 |
| VIII-2. Machines à rubans ampliatifs : une histoire de triangles. | 210 |
| VIII-2.1. Un triangle de Sierpinski. | 210 |
| VIII-2.2. Notion d'homothétie interne et distance de Hausdorff. | 211 |
| VIII-2.3. Dimension de Hausdorff et caractère fractal du triangle de Sierpinski. | 214 |
| VIII-2.4. Coordonnées binaires et triangle de Sierpinski. | 216 |
| VIII-2.5. Triangle de Pascal et triangle de Sierpinski. | 218 |
| VIII-2.6. Hasard et triangle de Sierpinski. | 221 |
| VIII-2.7. Le Jeu de la Tour d'Hanoï et le triangle de Sierpinski. | 223 |
| VIII-2.8. Une certaine marche du Roi et un triangle de Sierpinski. | 226 |
| VIII-2.9. Du triangle de Pascal au triangle de Sierpinski. | 228 |
| VIII-3. Incursion dans une galerie de tapisseries. Classification de Stephen Wolfram. | 232 |
| VIII-4. Comment un automate cellulaire définit une machine de Turing | 237 |

CHAPITRE IX

Les automates cellulaires : caractérisation

| | |
|--|-----|
| IX-1. Généralités. | 245 |
| IX-2. Automates cellulaires unidimensionnels. | 247 |
| IX-2.1. Caractérisation polynômiale. | 247 |
| IX-2.2. Caractérisation matricielle. | 253 |
| IX-2.2.1. Matrice caractéristique. | 253 |
| IX-2.2.2. Condition d'existence d'un groupe cyclique. | 254 |
| IX-2.2.3. Automate cellulaire complémenté | 256 |
| IX-2.2.4. Structure de cycle. | 257 |
| IX-3. Automates cellulaires bidimensionnels. | 262 |
| IX-3.1. Automate cellulaire 2D cyclique. | 265 |
| IX-3.2. Longueur de cycle. | 268 |

CHAPITRE X

Voisinage de von Neumann

| | |
|---|-----|
| X-1. Les automates linéaires. | 275 |
| X-2. Automate de Banks et propagation de signaux. | 278 |
| X-3. Automate Tartan. | 284 |
| X-4. Mémoire du passé. Formes pleines et contours. | 286 |
| X-5. Mémoire d'avenir. Réversibilité du temps. | 290 |
| X-6. Membrane de protection. Effet tunnel. | 301 |
| X-7. Bruit de fond pseudo-aléatoire. | 305 |
| X-8. Phénomène de diffusion et processus de Poisson. | 308 |

CHAPITRE XI

Le voisinage de Moore

| | |
|--|-----|
| XI-1. La règle « Un sur huit ». | 313 |
|--|-----|

| | | |
|------------------|---|-----|
| XI-2. | Le Jeu de la Vie. | 314 |
| XI-2.1. | Zoologie. | 317 |
| XI-2.1.1. | Des colonies stables. | 317 |
| XI-2.1.2. | Des oscillateurs. | 318 |
| XI-2.1.3. | Vaisseaux et puffeurs. | 319 |
| XI-2.1.4. | Fusées. | 323 |
| XI-2.1.5. | Les « Jardins de l'Éden ». | 324 |
| XI-2.2. | Automate de Conway et portes logiques. | 325 |
| XI-2.2.1. | Glissades et collisions. | 325 |
| XI-2.2.2. | Géniteurs et générateurs de glisseurs. Canons et cadences de tir. | 330 |
| XI-2.2.3. | Portes logiques. | 338 |
| XI-2.2.4. | Le Jeu de la Vie et l'universalité. | 343 |
| XI-2.2.5. | Biojeu. | 343 |
| XI-3. | L'automate cellulaire de Silverman à quatre états. Monde câblé et portes électroniques. | 344 |
| XI-3.1. | Diode. | 345 |
| XI-3.2. | Porte OU. Horloge. | 346 |
| XI-3.3. | Porte NON. | 347 |
| XI-3.4. | Porte OU exclusif et porte ET. | 348 |
| XI-3.5. | Unité de mémoire. | 350 |
| XI-3.6. | Compteur binaire sur trois bits. | 350 |
| XI-3.7. | Le Monde câblé et l'universalité | 351 |

CHAPITRE XII

Le voisinage de Margolus

| | | |
|-------------------|--|-----|
| XII-1. | Définitions et premiers exemples. | 353 |
| XII-1.1. | Le « Myosotis » et la réversibilité. | 354 |
| XII-1.2. | La fuite des éclopés. | 357 |
| XII-2. | Le monde de la logique câblée. | 358 |
| XII-2.1. | Génération et extinction de signaux à l'extrémité d'un fil conducteur. | 360 |
| XII-2.2. | Propagation d'un signal le long d'un fil. Porte NON. | 361 |
| XII-2.3. | Propagation des signaux lors d'un branchement. Porte ET. | 363 |
| XII-2.4. | Croisement de fils. | 366 |
| XII-2.5. | Générateurs d'impulsions. | 367 |
| XII-2.6. | Exemples de circuits. | 368 |
| XII-3. | Le monde des particules. | 372 |
| XII-3.1. | Particules en mouvement. Mécanisme de collision. | 372 |
| XII-3.1.1. | Déplacements diagonaux. Modèle du gaz HPP. | 372 |
| XII-3.1.2. | Déplacements longitudinaux. Modèle du gaz TM. | 377 |
| XII-3.2. | Simulation de phénomènes physiques. | 379 |
| XII-3.2.1. | Modèle de diffusion 2D à processus stochastique. | 379 |
| XII-3.2.2. | Modèle de diffusion 2D dans le vide. | 382 |
| XII-3.2.3. | Modèle d'agrégation par diffusion limitée. | 384 |
| XII-3.2.4. | Modèles d'ondes acoustiques et d'ondes lumineuses. | 387 |
| XII-4. | Le monde du billard. | 390 |
| XII-4.1. | Le modèle Fredkin-Toffoli sur automate cellulaire. | 391 |
| XII-4.2. | Exemples d'éléments de circuit. | 394 |
| XII-4.3. | Le modèle à billes de billard, la réversibilité et la logique conservatrice. | 396 |

CHAPITRE XIII

Le monde des fourmis

| | |
|---|-----|
| XIII-1. Déterminisme et chaos. | 403 |
| XIII-2. Fourmi de Langton. | 406 |
| XIII-3. Fourmis généralisées de Langton et/ou Tur-mites. | 408 |
| XIII-4. Fourmis ouvrières, ménagères accomplies. | 420 |
| XIII-5. Les fourmis architectes de Turing. | 423 |
| XIII-6. Fourmis agricoles et chasseresses. | 424 |
| XIII-7. La leçon des fourmis. | 428 |

CHAPITRE XIV

Autoréplication et vie artificielle

| | |
|--|-----|
| XIV-1. Vie naturelle et vie artificielle. | 429 |
| XIV-1.1. Qu'est-ce que la vie ? | 429 |
| XIV-1.1.1. La reproduction chez les êtres vivants. | 430 |
| XIV-1.1.2. L'évolution dans le monde vivant. | 431 |
| XIV-1.2. Qu'en est-il de la vie artificielle ? | 432 |
| XIV-1.2.1. L'imitation mécanique de la vie. | 432 |
| XIV-1.2.2. L'imitation biochimique de la vie. | 432 |
| XIV-1.2.3. L'imitation de la logique du vivant. | 433 |
| XIV-2. L'autoréplication et l'automate autoréplicateur de John von Neumann. | 438 |
| XIV-3. La boucle de Langton. | 441 |
| XIV-3.1. Propagation du signal. | 441 |
| XIV-3.2. Dédoublage du signal. | 443 |
| XIV-3.3. Introduction d'une fibre de sortie et son extension. | 445 |
| XIV-3.4. Enroulement de la fibre de sortie. | 447 |
| XIV-3.5. Fermeture de la boucle et coupure du cordon ombilical. | 449 |
| XIV-3.6. Création de fibres de sortie. | 450 |
| XIV-3.7. Rétraction de fibre et agonie de la boucle. | 451 |
| XIV-4. La boucle de John Byl. | 453 |
| XIV-5. Boucles de James Reggia. | 457 |
| XIV-6. Un ver et une boucle parmi d'autres. | 460 |
| XIV-7. La ronde du Petit Poucet. | 463 |

CONCLUSION

| | |
|-------------------|-----|
| Conclusion | 473 |
|-------------------|-----|

BIBLIOGRAPHIE

| | |
|----------------------|-----|
| Bibliographie | 479 |
|----------------------|-----|