

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

III

CHAPITRE I

Les quanta s'invitent

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| I-1. L'Univers est en constante évolution | 2 |
| I-2. L'âge de l'Univers | 4 |
| I-2.1. Le rayonnement fossile témoigne | 4 |
| I-2.2. Les amas globulaires et les quasars confirment | 7 |
| I-2.3. La radioactivité contresigne | 8 |
| I-3. Sur les premières marches de la « Schola Quantorum » | 9 |
| I-3.1. L'effet photoélectrique | 12 |
| I-3.2. L'effet Compton | 12 |
| I-3.3. La diffraction des électrons et la dualité onde-corpuscule | 13 |
| I-4. Quantification de l'espace | 16 |
| I-4.1. Les quanta sont nichés au sein de l'atome | 16 |
| I-4.2. Le spin de l'électron | 18 |
| I-4.3. La polarisation de la lumière et la notion d'amplitude de probabilité | 19 |
| I-5. En bref | 28 |

CHAPITRE II

Schola Quantorum : 1^{re} année Le cadre mathématique

| | |
|---------------------------------------------------------------|----|
| II-1. Vecteurs et opérateurs | 31 |
| II-1.1. Espace vectoriel et vecteurs kets | 31 |
| II-1.2. Espace vectoriel dual et vecteurs bras | 33 |
| II-1.3. Produit scalaire | 34 |
| II-1.4. Espace de Hilbert | 36 |
| II-1.5. Opérateurs linéaires | 36 |
| II-1.6. Produit tensoriel | 38 |
| II-2. Opérateurs hermitiques, projecteurs et observables | 40 |
| II-2.1. Opérateurs adjoints, hermitiques, unitaires | 40 |
| II-2.2. Valeurs propres, vecteurs propres et observables | 41 |
| II-2.3. Projecteurs et leur algèbre | 43 |
| II-2.4. Spectre d'une observable et diagonalisation | 45 |
| II-2.5. Fonction d'observable | 46 |
| II-3. Théorie de la représentation | 48 |
| II-3.1. Représentation matricielle des vecteurs et opérateurs | 48 |
| II-3.2. Matrices de Pauli | 53 |

| | |
|--------------------------------------------------------|----|
| II-3.3. Transformations unitaires | 54 |
| II-3.3.1. Diagonalisation | 55 |
| II-3.3.2. Changement de représentation | 56 |
| II-3.4. Les principes de la mécanique quantique | 58 |

CHAPITRE III

Schola Quantorum : 2^e année La dynamique quantique, la statistique quantique

| | |
|---------------------------------------------------------|----|
| III-1. Les équations du mouvement | 61 |
| III-1.1. L'équation de Schrödinger | 61 |
| III-1.2. Relation d'incertitude de Heisenberg | 64 |
| III-1.3. L'opérateur d'évolution | 65 |
| III-1.4. Les divers modes de description | 67 |
| III-1.4.1. Le mode de description de Schrödinger | 67 |
| III-1.4.2. Le mode de description de Heisenberg | 68 |
| III-2. La statistique quantique | 71 |
| III-2.1. La polarisation du photon | 71 |
| III-2.2. L'opérateur densité | 75 |
| III-2.2.1. Cas d'un état pur | 75 |
| III-2.2.2. Cas d'un mélange statistique | 77 |
| III-2.2.3. Trois remarques | 79 |
| III-2.3. Évolution de l'opérateur densité | 83 |
| III-2.4. Caractérisation de l'opérateur densité | 84 |

CHAPITRE IV

Le qubit, unité élémentaire d'information quantique

| | |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| IV-1. Le spin $\frac{1}{2}$ | 88 |
| IV-1.1. Opérateur de rotation | 88 |
| IV-1.2. Rotation et moment cinétique | 91 |
| IV-1.3. Rotation des états de spin $\frac{1}{2}$ | 93 |
| IV-2. Opérateur densité d'un qubit | 97 |
| IV-3. Portes logiques classiques, portes logiques quantiques | 99 |
| IV-3.1. Portes logiques classiques | 99 |
| IV-3.2. Portes logiques quantiques | 106 |
| IV-4. Préparation de qubits | 110 |
| IV-4.1. À partir de l'expérience de Stern et Gerlach | 110 |
| IV-4.2. Avec un champ magnétique constant | 112 |
| IV-4.3. Avec un champ magnétique tournant | 113 |

CHAPITRE V

Deux qubits et plus si...

| | |
|-----------------------------------------------------|-----|
| V-1. L'intrication | 119 |
| V-1.1. Notion d'intrication | 119 |
| V-1.2. Exemples d'intrication | 120 |
| V-1.2.1. Premier exemple : les états de Bell | 120 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----|
| V-1.2.2. | Deuxième exemple : formation d'un état intriqué | 122 |
| V-1.2.3. | Troisième exemple : critère de non-intrication | 123 |
| V-1.2.4. | Quatrième exemple : d'un état intriqué à un état non intriqué | 123 |
| V-2. | Mise en cause de la théorie quantique | 124 |
| V-2.1. | L'argument EPR et le principe de complétude | 124 |
| V-2.2. | Les inégalités de Bell | 127 |
| V-2.3. | L'expérience d'Alain Aspect | 130 |
| V-2.4. | Le chat de Schrödinger et la décohérence | 132 |
| V-3. | Retour sur le formalisme de l'opérateur densité | 134 |
| V-3.1. | L'opérateur densité réduit et l'opération trace partielle | 134 |
| V-3.2. | Le théorème de Gleason | 136 |
| V-4. | La décomposition et la purification de Schmidt | 137 |
| V-5. | Portes quantiques à deux bits : la porte cNOT et les circuits associés | 139 |
| V-5.1. | Permutation des états de deux qubits | 140 |
| V-5.2. | Le théorème de non-clonage | 140 |
| V-5.3. | Construction des états de Bell | 141 |
| V-5.4. | Codage dense | 142 |
| V-5.5. | La téléportation | 143 |
| V-6. | Portes quantiques à trois qubits : la porte de Toffoli | 144 |

CHAPITRE VI

Algorithmes de Deutsch-Jozsa et de Grover

| | | |
|-----------|---------------------------------------------------|-----|
| VI-1. | Les notions d'algorithme et de complexité | 147 |
| VI-1.1. | Les notions de calculabilité et de décidabilité | 147 |
| VI-1.2. | Machine de Turing classique | 149 |
| VI-1.3. | Machine de Turing quantique | 153 |
| VI-1.4. | Complexité des algorithmes | 155 |
| VI-2. | L'algorithme de Deutsch-Jozsa | 156 |
| VI-2.1. | Le problème de Deutsch | 156 |
| VI-2.2. | Le problème de Deutsch-Jozsa | 159 |
| VI-2.3. | Le problème de Bernstein-Vazirani | 163 |
| VI-2.4. | Le problème de Simon | 164 |
| VI-3. | L'algorithme de recherche de Grover | 166 |
| VI-3.1. | L'oracle | 167 |
| VI-3.2. | L'itération de Grover | 168 |
| VI-3.3. | Exposé de la procédure suivi de deux applications | 170 |
| VI-3.3.1. | La procédure | 170 |
| VI-3.3.2. | « Un parmi quatre » | 171 |
| VI-3.3.3. | « Un parmi huit » | 172 |
| VI-3.4. | Le circuit quantique | 173 |
| VI-3.5. | Recherche de plusieurs index | 175 |
| VI-3.6. | Parenthèse sur le chiffre DES | 176 |

CHAPITRE VII

Algorithme de Shor

| | |
|---------------------------------------------------|-----|
| VII-1. La transformée de Fourier quantique | 177 |
| VII-2. Période d'une fonction | 184 |
| VII-2.1. Calcul de la période | 184 |
| VII-2.2. La notion de fractions continues | 189 |
| VII-3. L'algorithme de Shor | 191 |
| VII-3.1. Un peu d'arithmétique modulaire | 191 |
| VII-3.2. Le problème de la factorisation | 194 |
| VII-3.3. La procédure | 197 |
| VII-3.4. Deux exemples | 201 |
| VII.4. Quantique et cryptographie | 205 |
| VII-4.1. Le système de cryptage RSA | 206 |
| VII-4.2. La distribution quantique de clés | 209 |
| VII-4.2.1. Le protocole BB84 | 210 |
| VII-4.2.2. Le protocole EPR | 213 |

CHAPITRE VIII

Bruits quantiques

Codes correcteurs d'erreurs quantiques

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| VIII-1. Opération quantique et opérateurs de Kraus | 216 |
| VIII-2. Bruits quantiques | 219 |
| VIII-2.1. La dépolarisation | 219 |
| VIII-2.2. Inversion de bit (bit flip), inversion de phase (phase flip) | 221 |
| VIII-2.3. Réduction d'amplitude | 233 |
| VIII-2.4. Saut de phase | 225 |
| VIII-3. Codes correcteurs d'erreurs quantiques | 228 |
| VIII-3.1. Code correcteur à trois qubits, cas de l'inversion de bit | 229 |
| VIII-3.1.1. La détection | 230 |
| VIII-3.1.2. La récupération | 231 |
| VIII-3.2. Code correcteur à trois qubits, cas de l'inversion de phase | 233 |
| VIII-3.3. Code correcteur de Shor à neuf qubits | 233 |
| VIII-3.4. Code correcteur à cinq qubits | 237 |

CHAPITRE IX

Ordinateurs quantiques : avec quoi et comment ?

| | |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| IX-1. Retour sur des considérations générales | 241 |
| IX-2. Quelques principes à suivre | 244 |
| IX-3. La résonance magnétique nucléaire ou RMN | 248 |
| IX-3.1. Le dispositif expérimental | 251 |
| IX-3.2. L'opérateur d'évolution | 252 |
| IX-3.2.1. Cas d'un spin dans un champ magnétique classique | 252 |
| IX-3.2.2. Couplage spin-spin | 254 |
| IX-3.2.3. À l'équilibre thermique | 255 |

| | |
|-------------------------------------------|-----|
| IX-3.2.4. Les signaux | 256 |
| IX-3.3. Construction de portes quantiques | 258 |
| IX-3.3.1. Portes à un qubit | 258 |
| IX-3.3.2. Porte cNOT | 259 |
| IX-3.3.3. La technique de refocalisation | 260 |
| IX-3.4. L'algorithme de Shor | 261 |
| IX-4. Les ions piégés | 263 |
| IX-4.1. Le dispositif expérimental | 264 |
| IX-4.2. L'opérateur d'évolution | 270 |
| IX-4.3. Construction de portes logiques | 274 |
| IX-4.4. Côté expérimental | 277 |
| IX-5. Ordinateurs photoniques | 278 |
| IX-5.1. Approche classique | 279 |
| IX-5.2. Approche quantique | 283 |

CHAPITRE X

L'Univers, ordinateur quantique ultime

| | |
|-----------------------------------------------------|-----|
| X-1. La physique quantique et le réalisme | 289 |
| X-2. La simulation quantique | 291 |
| X-3. La nature calcule | 292 |
| X-4. L'Univers ordinateur quantique | 293 |
| X-4.1. Son histoire | 293 |
| X-4.2. Sa capacité de calcul | 295 |
| X-5. Et maintenant ? | 297 |
| X-5.1. Mesure sans interaction et calcul contrefait | 297 |
| X-5.2. Calcul quantique topologique | 298 |
| X-5.3. Qu'en est-il ? | 302 |

| | |
|---------------|-----|
| BIBLIOGRAPHIE | 305 |
|---------------|-----|

| | |
|-------|-----|
| INDEX | 317 |
|-------|-----|