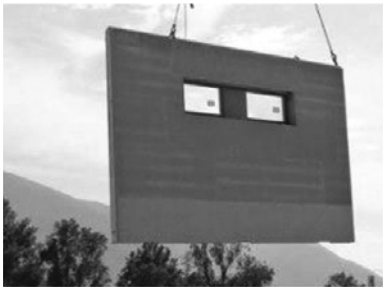
Chapitre 1- Mécanique

Exercice 1 : Levage d’une charge par une grue



La structure d’un immeuble à ossature en bois est constituée de montants et de traverses sur lesquels seront fixés des panneaux. Lorsque la structure de l’immeuble est terminée, on passe à l’assemblage des panneaux préfabriqués ; ceux-ci sont levés avec une grue à tour qui permet de lever les charges au moyen d’un système de palan. On étudie une étude mécanique du levage d’un panneau de masse $M = 650\ \text{kg}$.

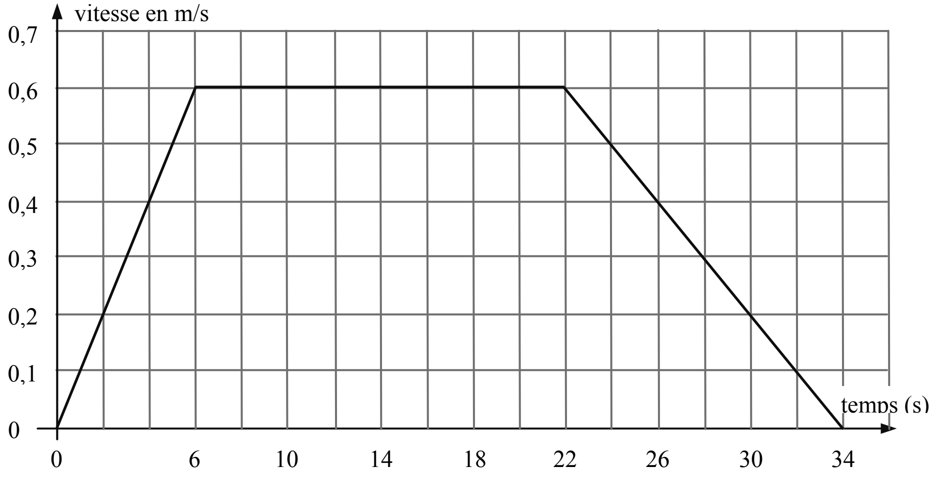
L’accélération de la pesanteur, g, sera prise égale à $9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$.

Le panneau de bois, relié au câble de la grue, est initialement maintenu immobile au sol. A la date $t = 0$, la grue soulève la charge en exerçant une force notée $\vec{T}$.

Le mouvement du centre gravité G du panneau est étudié selon l’axe Oz vertical ascendant dans le référentiel terrestre en supposant les frottements négligeables.

La flèche de la grue est située à une hauteur de $25\ \text{m}$.

L’évolution de la vitesse du centre de gravité G est représentée ci-dessous :



Evolution de la vitesse du centre de gravité en fonction du temps

Elle se décompose en trois phases :

- une phase au cours de laquelle la vitesse est croissante ;
- une phase à vitesse constante ;
- une phase pendant laquelle la vitesse décroît.

A l'instant $t = 0$, le centre de gravité est en O.

1. Effectuer un bilan des forces qui s'exercent sur le panneau lors de son ascension et les représenter sur le schéma du document réponse à rendre avec la copie.

2. Pour chacune des phases, déterminer graphiquement la valeur de l'accélération, la nature du mouvement et la distance parcourue par le centre de gravité G. Ces résultats sont à rassembler dans le document réponse à rendre avec la copie.

Rappel :

Mouvement de translation On a $\Delta z = z_{final} - z_{initial}$ la distance parcourue pendant la durée $\Delta t = t_{final} - t_{initial}$, a l'accélération subie supposée constante et $v_{initiale}$ la vitesse initiale (à l'instant $t_{initial}$). Distance Δz parcourue pendant une durée Δt : $\Delta z = \frac{1}{2} a\,(\Delta t)^2 + v_{initiale}\,(\Delta t)$

3. Déduire de l'étude précédente la hauteur h de levage du panneau.

4. Déterminer pour chaque phase, la force exercée par le câble de levage.

5. Un paramètre important à prendre en compte est le moment par rapport au support vertical de la grue exercé par le poids de la charge sur le bras de la grue. La grue utilisée doit pouvoir soulever des masses de $3{,}0 \times 10^3$ kg.

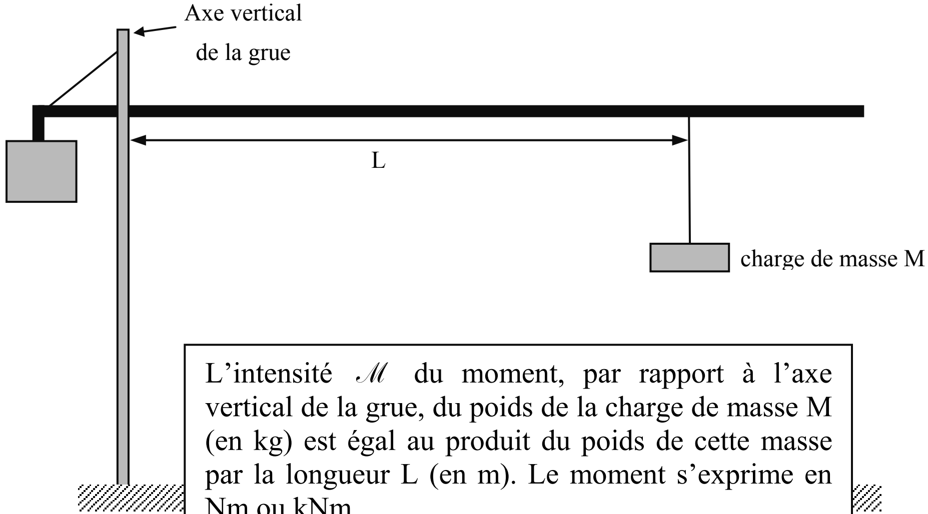
A quelle distance maximale du support vertical une telle charge peut-elle être placée ?

Données :

Caractéristiques de la grue utilisée :
Puissance du moteur de levage : 10 kW
Longueur de la flèche : 20 m
Hauteur de la flèche : 25 m
Moment maximal de la charge en bout de flèche : 157 kNm

D'après BTS Charpente Couverture 2015

Moment d'une force



L'intensité $\mathscr{M}$ du moment, par rapport à l'axe vertical de la grue, du poids de la charge de masse M (en kg) est égal au produit du poids de cette masse par la longueur L (en m). Le moment s'exprime en Nm ou kNm.

$1\,\text{kNm} = 10^3\ \text{Nm}$

Document-réponse (à rendre avec la copie)

Question 1 :

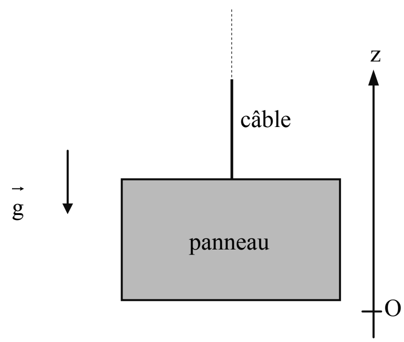
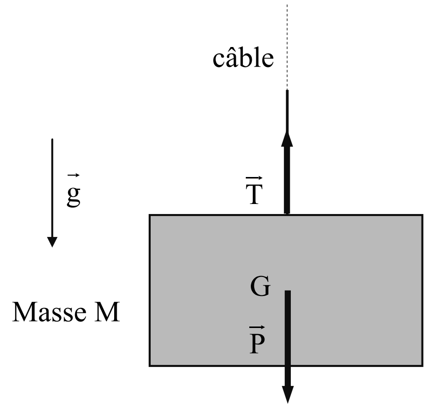


Tableau à compléter (Question 2)

	Phase 1 La vitesse de levage croît	Phase 2 La vitesse de levage est constante	Phase 3 La vitesse de levage décroît
Durée Δt			
Accélération			
Nature du mouvement			
Distance parcourue			

Corrigé de l'exercice 1

1. La charge de masse M est soumise à deux forces :



La tension $\vec{T}$ du câble qui s'exerce au point d'attache.

Le poids $\vec{P}$ (avec : $P = M\,g$) qui est appliqué au centre de gravité G de la charge.

2. L'accélération de la charge correspond à la dérivée par rapport au temps de la vitesse. Comme la vitesse est une fonction affine du temps, il est aisé de déterminer l'accélération en calculant la pente des trois portions de droite sur le document fourni en annexe :

■ Calculs des accélérations :

Phase 1 : $a_1 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0{,}6\ \mathrm{m.s^{-1}}}{6\ \mathrm{s}} = 0{,}10\ \mathrm{m.s^{-2}}$

Phase 2 : l'accélération est nulle : $a_2 = 0$

Phase 3 : $a_3 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{-\,0{,}6\ \mathrm{m.s^{-1}}}{12\ \mathrm{s}} = -\,0{,}05\ \mathrm{m.s^{-2}}$

■ Calcul des distances parcourues

La vitesse de la charge correspond à la dérivée par rapport au temps de la distance parcourue. Comme la vitesse est une fonction affine du temps, il est aisé de déterminer la distance parcourue en calculant l'aire située sous les trois portions de droite sur le document fourni en annexe :

Phase 1 : $\text{"aire}_1\text{"} = \underbrace{\dfrac{1}{2}\,(\Delta t)_1 \times (\Delta v)_1}_{\text{triangulaire}} = \dfrac{1}{2} \times 6\ \mathrm{s} \times 0{,}6\ \mathrm{m.s^{-1}} = 1{,}8\ \mathrm{m}$;

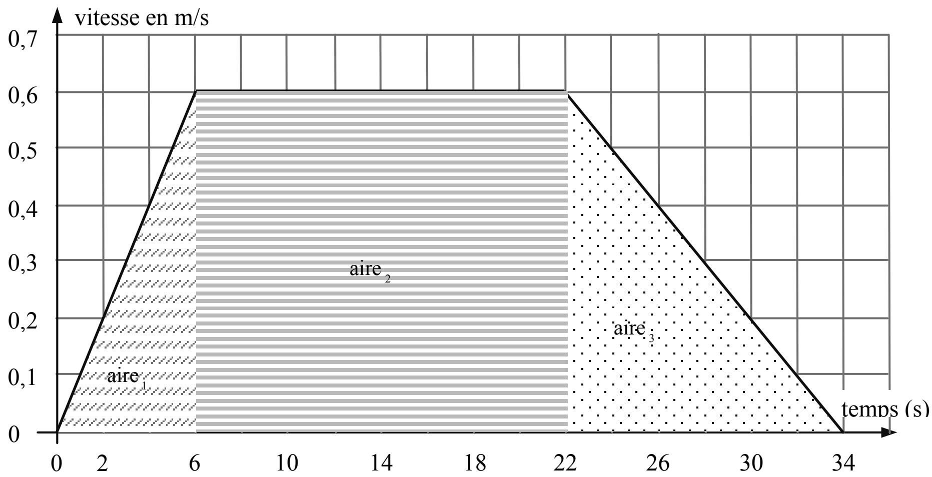
distance parcourue : $d_1 = 1{,}8\ \mathrm{m}$

Phase 2 : $\text{"aire}_2\text{"} = \underbrace{(\Delta t)_2 \times v_2}_{\text{rectangulaire}} = 16\ \mathrm{s} \times 0{,}6\ \mathrm{m.s^{-1}} = 9{,}6\ \mathrm{m}$;

distance parcourue : $d_2 = 9{,}6\ \mathrm{m}$

Phase 3 : $\text{"aire}_3\text{"} = \underbrace{\dfrac{1}{2} \times (\Delta t)_3 \times (\Delta v)_3}_{\text{triangulaire}} = 12\ \mathrm{s} \times 0{,}6\ \mathrm{m.s^{-1}} = 3{,}6\ \mathrm{m}$;

distance parcourue : $d_3 = 3{,}6\ \mathrm{m}$



Evolution de la vitesse du centre de gravité en fonction du temps

Tableau à compléter (question 2)

	Phase 1 La vitesse de levage croît	Phase 2 La vitesse de levage est constante	Phase 3 La vitesse de levage décroît
Durée Δt	$(\Delta t)_1 = 6\ \text{s}$	$(\Delta t)_2 = 16\ \text{s}$	$(\Delta t)_3 = 12\ \text{s}$
Accélération	$a_1 = 0{,}10\ \text{m.s}^{-2}$	$a_2 = 0$	$a_3 = -\,0{,}05\ \text{m.s}^{-2}$
Nature du mouvement	uniformément accéléré	uniforme	uniformément décéléré
Distance parcourue	$d_1 = 1{,}8\ \text{m}$	$d_2 = 9{,}6\ \text{m}$	$d_3 = 3{,}6\ \text{m}$

Remarque concernant le calcul des distances : on peut utiliser la méthode fournie par l'énoncé… moins pratique dans le cas particulier de cet exercice.

Phase 1 : $d_1 = \dfrac{1}{2} a_1 \, (\Delta t)_1$ (la vitesse initiale est nulle) :

$$\boxed{d_1 = \frac{1}{2} \times 0{,}1\ \text{m.s}^{-2} \times (6\ \text{s})^2 = 1{,}8\ \text{m}}$$

Phase 2 : $d_2 = \underbrace{\dfrac{1}{2} a_2 \, (\Delta t)_2{}^2}_{=0} + v_2 \, (\Delta t)_2$ car $v_{\text{initiale}} = v_2 = 0{,}6\ \text{m.s}^{-1}$ et $a_2 = 0$.

On écrit : $\boxed{d_2 = 0,6\ \text{m.s}^{-1} \times 16\ \text{s} = 9,6\ \text{m}}$

Phase 3 : $d_3 = \frac{1}{2} a_3\, (\Delta t)_3 + v_2 \times (\Delta t)_3$ (la vitesse initiale est $v_2 = 0,6\ \text{m.s}^{-1}$)

$$\boxed{d_3 = \frac{1}{2} \times (-\,0,05\ \text{m.s}^{-2}) \times (12\ \text{s})^2 + 0,6\ \text{m.s}^{-1} \times 12\ \text{s} = 3,6\ \text{m}}$$

3. La hauteur h est obtenue par la somme des trois distances parcourues :

$$h = d_1 + d_2 + d_3 = 15,0\ \text{m}\,.$$

4. On oriente l'axe vertical ascendant avec le vecteur unitaire $\vec{u}$.

On applique, lors des trois phases, le théorème fondamental de la dynamique au panneau mobile dans le référentiel terrestre galiléen : $\vec{T} + \vec{P} = M\,\vec{a}$

Phase 1 : $\vec{T_1} + \vec{P} = M\,\vec{a_1}$; avec $\vec{T_1} = T_1\,\vec{u}$; $\vec{P} = -\,M\,g\,\vec{u}$ et $\vec{a_1} = a_1\,\vec{u}$

On obtient : $T_1\,\vec{u} + (-\,M\,g\,\vec{u}) = M\,a_1\,\vec{u}$ puis : $T_1 - M\,g = M\,a_1$ et, enfin :

$$\boxed{T_1 = M\,(a_1 + g)} \qquad \boxed{T_1 = 6,44 \times 10^3\ \text{N}}$$

Phase 2 : L'accélération est nulle ; les deux forces se compensent :

$$\boxed{T_2 = M\,g} \qquad \boxed{T_2 = 6,38 \times 10^3\ \text{N}}$$

Phase 3 : le raisonnement se fait comme à la phase 1 :

$\vec{T_3} + \vec{P} = M\,\vec{a_3}$; avec $\vec{T_3} = T_3\,\vec{u}$; $\vec{P} = -\,M\,g\,\vec{u}$ et $\vec{a_3} = a_3\,\vec{u}$;

On obtient : $T_3\,\vec{u} + -\,M\,g\,\vec{u} = M\,a_{31}\,\vec{u}$ puis : $T_3 - M\,g = M\,a_3$ et, enfin :

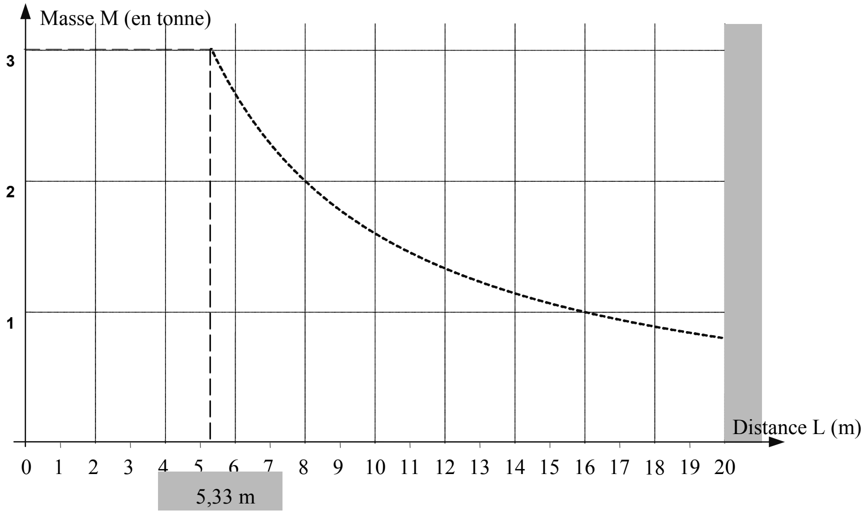
$$\boxed{T_3 = M\,(a_3 + g)} \qquad \boxed{T_3 = 6,34 \times 10^3\ \text{N}}$$

Remarque : Attention au signe de a_3 ; a_3 est une mesure algébrique.

5. Le moment maximal s'écrit : $\mathscr{M}_{max} = L_{max} \times M_{max}\ g$ avec : $M_{max} = 3,0 \times 10^3$ kg

On détermine la distance L_{max}, distance maximale entre le support vertical et la charge : $L_{max} = \dfrac{\mathscr{M}_{max}}{M_{max}\ g}$ $\qquad \boxed{L_{max} = 5,3\ \text{m}}$

Remarque : On peut faire une résolution graphique en traçant le graphe : $L \times M = \dfrac{\mathscr{M}_{max}}{g} = \text{cste}$.



- Pour soulever une masse à 16 m de l'axe vertical, il ne faut pas dépasser la masse de $1\ \text{t} = 1 \times 10^{3}\ \text{kg}$.
- Pour soulever une masse à 8 m de l'axe vertical, il ne faut pas dépasser la masse de $2\ \text{t} = 2 \times 10^{3}\ \text{kg}$.

etc

Exercice 2 : Accéléromètre

Un accéléromètre peut être schématisé par les figures de la page suivante.

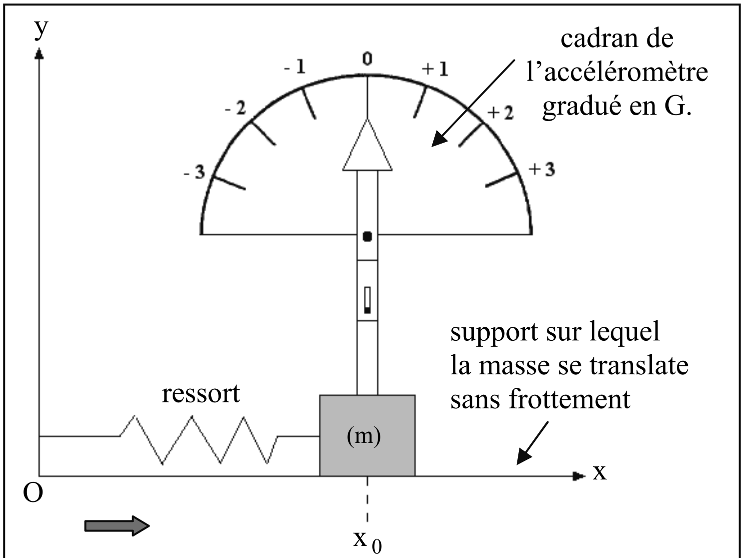
Une masse m, fixée à l'extrémité d'un ressort élastique dont l'autre extrémité est solidaire de l'avion, repose sur un support sans frottement. Un mécanisme permet de repérer son déplacement et indique par l'intermédiaire d'une aiguille la valeur de l'accélération de l'avion donnée en G ($1\text{G} = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$).

On suppose que l'avion se déplace rectilignement suivant la direction (Ox).

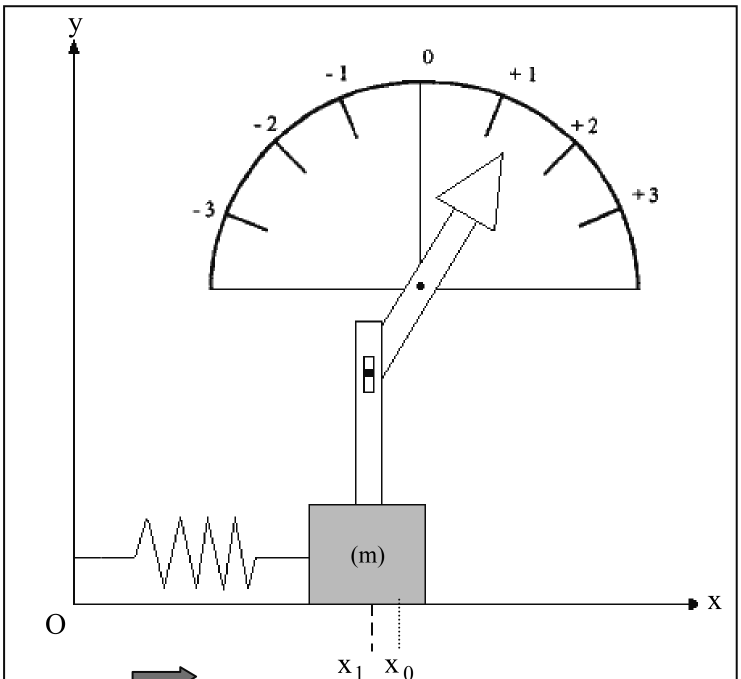
L'appareil ne peut mesurer que des accélérations suivant cette direction. Quand l'avion est au repos, la masse est repérée par son abscisse $x_0 = 5{,}0\ \text{cm}$.

Tout phénomène d'oscillations du ressort sera ignoré.

Toutes les liaisons entre les différentes pièces du mécanisme sont supposées sans frottements.



Déplacement de l'avion sans accélération



Déplacement de l'avion avec une accélération
dans le sens de Ox