Sujet n° 1

Mines 2015 – Mathématiques I

L'énoncé

Méthode de Stein

- On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (p_n, n \geqslant 0) \text{ tel que } \forall n \geqslant 0, p_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \right\}.$$

- Pour P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$, on définit

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(n) q_n \right|,$$

où $\mathbb{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbb{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.

- Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

I. Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite
$$c\frac{\lambda^n}{n!}, n \geqslant 0$$
appartienne à $\mathcal{P}$.
2. Soit p et q deux réels de $[0,1]$. Calculer
$$\operatorname{dist}\big((1-p, p, 0, \ldots), (1-q, q, 0, \ldots)\big).$$
3. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)p_n, n \geqslant 0)$ est convergente.

II. Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)}, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)p_n^{(\lambda)}, n \geqslant 0)$ est convergente.
5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n, n \geqslant 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)q_n = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)q_n.$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

III. Résolution de l'équation de Stein

On note S_h, l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geqslant 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}.$$

7. Montrer que S_h possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in S_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

8. Pour $f \in S_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$, établir l'identité suivante :

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction $f \in S_h$ est bornée.

IV. Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction Δf définie par

$$\Delta f : \begin{array}{rl} \mathbb{N} & \to \mathbb{R} \\ n \mapsto & f(n+1) - f(n) \end{array}.$$

On veut montrer que pour $f \in S_h$,

$$\sup_{n \geqslant 1} |\Delta f(n)| \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right). \tag{5}$$

Pour un entier $m \geqslant 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbb{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \text{ et } h(n) = 0 \text{ si } n \neq m.$$

On note f_m l'un des éléments de $S_{\mathbb{1}_{\{m\}}}$.

10. Établir pour $1 \leqslant n \leqslant m$, l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Établir une identité analogue pour $n > m \geqslant 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.
12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbb{N} \backslash \{0, m\}$.
Indication : on distinguera les cas $1 \leqslant n < m$ et $n > m \geqslant 0$.
13. Établir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \text{ pour } m > 0.$$

14. En déduire que

$$\sup_{n \geqslant 1} \Delta f_m(n) \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k).$$

15. Montrer que $S_h = S_{h_+}$.
16. Montrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

est convergente pour tout entier $n \geqslant 1$.
17. Montrer que la fonction f définie, pour tout $n \geqslant 1$, par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n),$$

appartient à S_h.
18. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right).$$

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analoque que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right),$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.

V. Application probabiliste

On considère $(X_k, k = 1, \ldots, n)$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $r_k \in]0, 1]$:

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = r_k = 1 - \mathbf{P}(X_k = 0).$$

On pose $\lambda = \sum_{k=1}^n r_k$ ainsi que

$$S = \sum_{k=1}^n X_k \text{ et pour tout } k \in \{1, \ldots, n\}, W_k = S - X_k.$$

On identifie la loi de la variable aléatoire S et l'élément $(\mathbf{P}(S = k), k \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{P}$, l'ensemble défini au début de ce texte.

19. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $f \in \mathcal{F}$, montrer que

$$X_k f(S) = X_k f(W_k + 1) \text{ et que } \mathbf{E}(f(W_k)X_k) = r_k \mathbf{E}(f(W_k)).$$

20. Soit $h \in \mathcal{F}$ et $f \in S_h$, établir l'identité suivante.

$$\mathbf{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^n r_k \mathbf{E}\big(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\big).$$

21. Établir que

$$\operatorname{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) = \sup_{A\subset\mathbb{N}} \big|\mathbf{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S))\big|,$$

où f_A est un élément de $S_{\mathbb{1}_A}$.

22.

$$\operatorname{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^r r_k^2.$$

Le corrigé commenté

I. Préliminaires

1. Pour appartenir à l'ensemble $\mathcal{P}$ les nombres $c\frac{\lambda^n}{n!}$ doivent vérifier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c\frac{\lambda^n}{n!} = 1.$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c\frac{\lambda^n}{n!} = c\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = ce^{\lambda}$$

d'où

$$c = e^{-\lambda}.$$

De plus, si $c = e^{-\lambda}$, les nombres $c\frac{\lambda^n}{n!}$ sont positifs.

Commentaires

L'ensemble $\mathcal{P}$ est la définition d'une probabilité sur un univers dénombrable. Ne pas oublier dans cette question, même si c'est trivial, de mentionner le fait que les réels $c\frac{\lambda^n}{n!}$ sont positifs.

2. Calculons les différentes sommes $\sum_{n\in A} p_n$ avec $(p_n, n \geqslant 0) = (1-p, p, 0, \ldots)$.
Soit A une partie de $\mathbb{N}$
   - Si $0 \in A$ et $1 \notin A$, $\sum_{n\in A} p_n = 1 - p$.
   - Si $0 \notin A$ et $1 \in A$, $\sum_{n\in A} p_n = p$.
   - Si $0 \in A$ et $1 \in A$, $\sum_{n\in A} p_n = 1 - p + p = 1$.
   - Si $0 \notin A$ et $1 \notin A$, $\sum_{n\in A} p_n = 0$.

Par suite :

$$\left|\sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n\right| = |p - q| \text{ ou } 0.$$

Donc

$$\mathrm{dist}(P, Q) = |p - q|.$$

Commentaires

Cette question demande de bien comprendre la définition de la distance entre deux probabilités. Il faut noter que la partie A de $\mathbb{N}$ est la même dans l'indexation des deux sommes.

3. Puisque $f \in \mathcal{F}$ est bornée, on peut poser $\|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|f(n)p_n| \leqslant \|f\|_\infty p_n$. Or la série $\sum_{n\geqslant 0} p_n$ converge par définition de l'ensemble $\mathcal{P}$. Par suite, la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)p_n$ converge absolument donc converge.

Commentaires

Lorsqu'on ne connaît pas le signe du terme général d'une série, il faut avoir le réflexe de travailler en valeur absolue.
Tous les théorèmes de comparaison ($u_n \leqslant v_n$, $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, $u_n \sim v_n$) ne s'appliquent qu'aux des séries à termes positifs (à partir d'un certain rang) ou à termes négatifs (en passant à la série $\sum_{n\geqslant 0} -u_n$, on se ramène à une série à termes positifs.)
Rappelons que la convergence absolue d'une série entraîne sa convergence ; la réciproque étant fausse (penser à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$).

II. Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)}, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$.
Posons $u_n = nf(n)p_n^{(\lambda)}$. On a la majoration $|u_n| \leqslant n\|f\|_\infty p_n^{(\lambda)}$.
Pour $n \geqslant 1$, $np_n^{(\lambda)} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$. Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ converge (vers e^λ). On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} np_n^{(\lambda)}$ converge. Par suite, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument donc converge.

Commentaires

D'après la question 1, la suite $(p_n^{(\lambda)}, n \in \mathbb{N})$ est dans $\mathcal{P}$. On reconnaît la probabilité d'une loi de Poisson.

5. Soit $f \in \mathcal{F}$. D'après les questions 3 et 4, les séries en jeu sont convergentes.

$$\begin{aligned}
\lambda\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nf(n)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Comme le premier terme de la série est nul, on obtient l'identité :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)}.$$

Commentaires

Avant de manipuler les sommes de séries, il faut s'assurer que celles-ci convergent ce qui est bien le cas ici. Pour plus de précaution, on peut travailler sur les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} u_n$ puis faire tendre N vers $+\infty$.

6. On pose $f = \mathbb{1}_{\{k\}}$ avec k un entier naturel. Cette fonction est bornée donc appartient à $\mathcal{F}$.
L'identité

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) q_n = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) q_n$$

donne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda q_{k-1} = k q_k$ ou $q_k = \frac{\lambda}{k} q_{k-1}$.
Montrons alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \frac{\lambda^n}{n!} q_0.$$

- Pour $n = 0$, l'égalité est vraie.
- Supposons l'égalité vraie à un rang n. Alors

$$q_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} q_n = \frac{\lambda}{n+1} \frac{\lambda^n}{n!} q_0 = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} q_0.$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.
Comme $Q = (q_n, n \geqslant 0)$ appartient à $\mathcal{P}$, $q_0 = e^{-\lambda}$ d'après la question 1. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = p_n^{(\lambda)}$$

Autrement dit, $Q = P_\lambda$.

Commentaires

Cette question demande une prise d'initiative du candidat suggérée par l'énoncé. Les questions 5 et 6 permettent de caractériser la probabilité d'une loi de Poisson par l'équation fonctionnelle (1) de l'énoncé.

III. Résolution de l'équation de Stein

7. Soit f un élément de S_h. Donc f vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'identité

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

- D'après l'équation fonctionnelle (2) de l'énoncé avec $n = 0$:

$$\lambda f(1) = \tilde{h}(0).$$

On a donc

$$f(1) = \frac{\tilde{h}(0)}{\lambda} = \frac{(1-1)!}{\lambda^0} \sum_{k=0}^{1-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La formule (3) est donc établie au rang 1.

- Supposons que l'identité (3) soit vraie à un rang n avec n dans $\mathbb{N}^*$.
D'après l'identité (2) puis en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \frac{n}{\lambda} f(n) + \frac{1}{\lambda} \tilde{h}(n) \\
&= \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{\lambda} \tilde{h}(n) \\
&= \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \frac{\lambda^n}{n!} \tilde{h}(n) \\
&= \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Ainsi l'égalité (3) est vérifiée au rang $n+1$.

On a montré que si $f \in S_h$ alors f vérifie l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

Réciproquement, montrons que si f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'identité (3) alors f appartient à S_h.

$$\begin{aligned}
\lambda f(n+1) - nf(n) &= \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{n!}{\lambda^n} \tilde{h}(n) \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \tilde{h}(n).
\end{aligned}$$