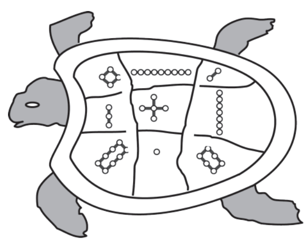
Introduction

Un carré magique est tout d’abord un bel objet mathématique. L'aspect esthétique de cet objet est tel qu'il a été bien vite récupéré par la magie et les sciences dites occultes qui lui ont attribué des vertus extraordinaires, mais l’ouvrage présent ne s’intéressera qu'à leurs vertus mathématiques. Nés en Chine, selon la légende il y a plus de trente siècles, les carrés magiques se sont diffusés en Inde, dans le monde arabo-musulman, dans l'Empire byzantin, puis en Occident. On sait qu'au cours de l'histoire, les civilisations d'Extrême-Orient, du Moyen-Orient, d'Afrique et d'Europe ont toujours procédé à des échanges de biens rares et précieux : sel, soie et tissus, ivoire, or et métaux, épices, etc. Le fait est moins connu, mais il était naturel que les idées également profitent de cette perméabilité entre les peuples et les civilisations pour se diffuser.

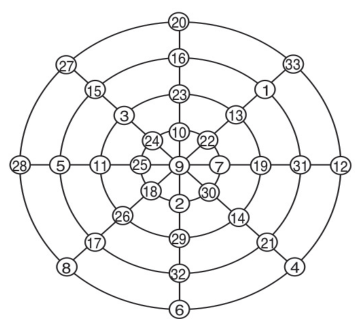
Les carrés magiques sont un des thèmes les plus anciens des jeux mathématiques, puisqu'ils remontent, selon la légende chinoise, à l'empereur Yu, qui régula le cours des rivières afin de limiter l'effet des inondations. La légende rapporte que le premier carré magique connu, le *Lo-Shu* (ou « diagramme du fleuve Lo »), serait apparu sur le dos d'une tortue divine sortant de la rivière Lo afin de faire comprendre aux villageois qu'ils devaient faire quinze offrandes au fleuve pour qu'il accepte de se retirer et de regagner son lit.

Le *Lun Sü* (conversations et discours de Confucius, V^{e} siècle avant notre ère) rappelle cette légende, en regrettant que, décadence de l'époque, déjà..., « les rivières ne fournissent plus de diagrammes ».



4	9	2
3	5	7
8	1	6

L'étude des carrés magiques se poursuivra en Chine avec le développement des mathématiques. La « magie arithmétique » s'étendra même à d'autres configurations. En 1275, le mathématicien chinois Yang Hui publie son traité : *Hsü ku chai chhi suan fa* (« continuation des anciennes méthodes pour élucider les étranges propriétés des nombres »), dans lequel on trouve des cercles magiques comme celui représenté ci-contre.

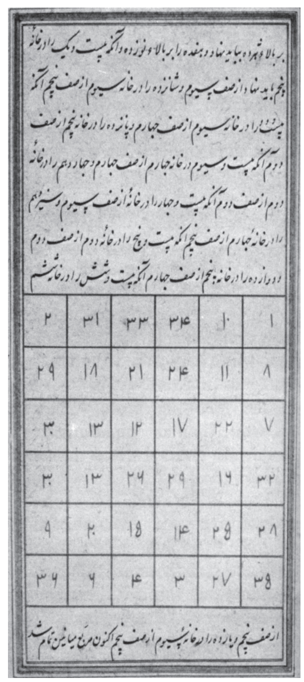


L'étude des carrés magiques a également été un thème de prédilection des mathématiciens indiens, dont on peut penser qu'ils ont « importé » l'idée de la Chine voisine. Dans un manuscrit concernant la magie, le *Kaksaputa*, on trouve la règle de construction de quatre carrés magiques, dont l'un est attribué à l'alchimiste Nâgârjuna, qui vivait au premier siècle de notre ère. D'autres exemples apparaissent ensuite, notamment chez l'astronome Varâhamihira (VI^e^ siècle), qui indique la construction d'un carré d'ordre 4, jusqu'au XIV^e^ siècle où une théorie complète des carrés magiques est donnée dans le *Ganita-Kaumudi* (1356), traité d'arithmétique du mathématicien Nârâyana. Au XVII^e^ siècle, le mathématicien français Simon de la Loubère, ambassadeur du Roi-Soleil auprès du roi du Siam, publiera un ouvrage intitulé *Du Royaume du Siam* (1691), où il décrira différents procédés de construction de carrés magiques qu'il dira avoir appris auprès de mathématiciens indiens.

Les temples jaïnistes de Khajuraho, construits vers l'an 950 de notre ère sont célèbres pour leurs sculptures érotiques tirées du *Kama Soutra*. On y trouve aussi des carrés magiques comme celui représenté ci-contre. Les chiffres utilisés sont les chiffres indiens dits *devanagari*.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Les carrés magiques apparaissent ensuite en Perse où l'on pense, même si les preuves manquent, qu'ils étaient déjà présents à l'époque pré-islamique. L'avènement de la civilisation islamique, avec les « maisons de la sagesse », lieux de collecte et de traduction de l'héritage des civilisations du monde connu, permettra aux mathématiciens de langue arabe de développer l'étude des carrés magiques. Au X^e^ siècle, le mathématicien persan Abul Wafa al Buzjani (940-998) consacrera un manuscrit à la construction des carrés magiques constitués de nombres entiers en progression arithmétique. Au cours des siècles suivants, les idées mathématiques se diffuseront par le biais de la langue arabe dans toute l'Afrique du Nord, jusqu'à l'Andalousie en Espagne, et jusque dans l'Afrique sub-saharienne. En effet, un manuscrit sur les carrés magiques écrit en 1732 en langue arabe, par un mathématicien africain originaire du Nigéria, Muhammad ibn Muhammad, a été retrouvé dans une bibliothèque du Caire. Ci-contre un carré magique figurant dans un manuscrit arabe du XVI^e^ siècle.



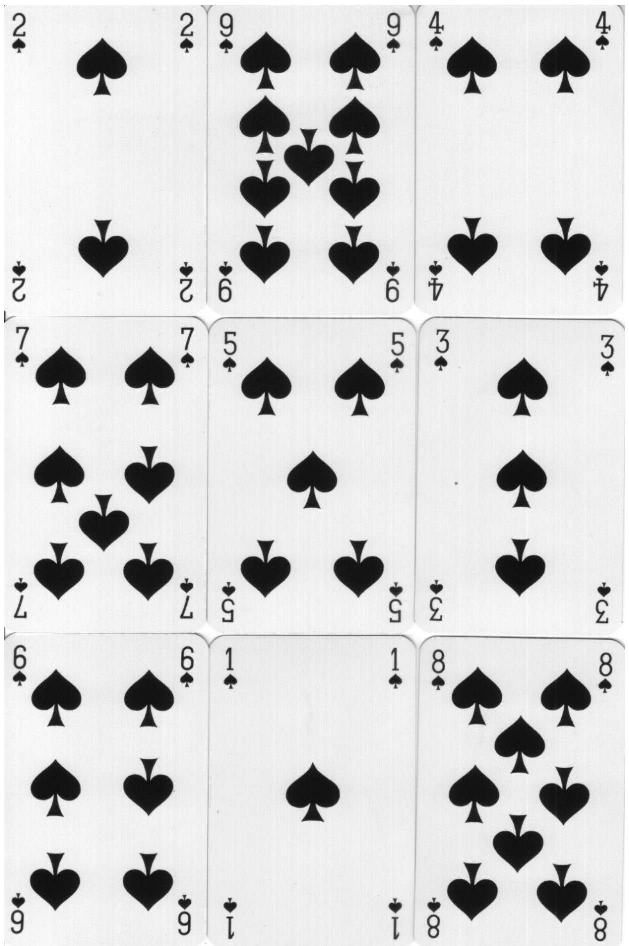
٢	٣١	٣٣	٣٤	١٠	١
٢٩	١٨	٢١	٢٤	١١	٨
٣٠	١٣	١٢	١٧	٢٢	٧
٣٠	١٣	٢٦	٢٩	١٦	٣٢
٩	٢٠	١٥	١٤	٢٥	٢٨
٣٦	٦	٤	٣	٢٧	٣٥

On ignore si les mathématiciens grecs connaissaient les carrés magiques, mais on sait que le concept a touché leurs héritiers de l'Empire Byzantin, avec certainement des apports des mathématiciens indiens et de langue arabe, jusqu'à la chute de Constantinople en 1453. Un manuscrit byzantin daté du début du XIV^e siècle (Bibliothèque Nationale de Paris, manuscrit n° 2428), dédié au géomètre byzantin Nicholas Rhabdas, est entièrement consacré à la description de méthodes de construction des carrés magiques. L'auteur de ce manuscrit est un moine byzantin, Manuel Moschopoulos, qui était le neveu d'un archevêque de Crète et le disciple du mathématicien Maxime Planude, introducteur de la numération de position et de l'usage du zéro dans le monde byzantin. On trouve déjà dans ce manuscrit le principe d'une méthode de construction des carrés magiques d'ordre impair dont une variante sera exposée plus tard par Bachet de Méziriac et qui demeurera connue sous le nom de « méthode de Bachet ».

En Europe, les carrés magiques retiendront d'abord l'attention des alchimistes et des « mages » de tout poil, friants des connaissances orientales ou supposées telles, avant que les mathématiciens ne s'y intéressent. Bachet de Méziriac leur consacre un chapitre de ses *Problèmes plaisants et délectables qui ne se font pas les nombres* (1612). De nombreux mathématiciens s'intéresseront ensuite aux carrés magiques : Pierre de Fermat, Bernard Frénicle de Bessy, mais aussi Leibniz, qui généraliseront l'idée en passant à la troisième dimension avec les cubes magiques.
Au XVIII^e siècle, Benjamin Franklin étudiera des carrés « diaboliques » d'ordre multiple de 4, où la somme magique est présente dans de nombreux motifs autres que les seules lignes, colonnes et diagonales principales.

A la fin du XIX^e siècle, leur étude sera relancée avec la recherche de carrés « bimagiques », carré magiques qui le demeurent lorsqu'on élève tous les nombres au carré.
La traque des carrés magiques est loin d'être terminée. Il reste aujourd'hui encore, malgré les moyens informatiques actuels, de nombreuses questions non résolues. Nous n'en citerons qu'une, celle du plus petit carré magique dont tous les nombres (qui ne sont pas des entiers consécutifs) sont des carrés d'entiers. On connaît un carré 3 × 3 dont sept nombres sur neuf sont des carrés. On ne sait pas si on peut faire mieux.
Sur les neuf nombres de ce carré magique, sept sont des carrés de nombres entiers. On ignore s'il est possible d'obtenir un carré 3 × 3 dont les neuf nombres sont des carrés.
Avis aux amateurs...

373^2	289^2	565^2
360 721	425^2	23^2
205^2	527^2	***222 121***



Chapitre 1
Les manipulations du carré magique

	6	32	3	34	35	1	111
	7	11	27	28	8	30	111
	19	14	15	15	23	24	111
	18	20	22	21	17	13	111
	25	29	10	9	26	12	111
	36	5	33	4	2	31	111
111	111	111	111	111	111	111	111

On se propose dans ce chapitre de répertorier les *principales manipulations* possibles dans un carré magique *normal*[*], et d'analyser les résultats obtenus.
Rappelons qu'il y a normalement « 2n + 2 » alignements magiques dans un carré magique normal, et « 2n – 2 » diagonales brisées éventuellement magiques.

Les permutations des lignes et des colonnes

La permutation des lignes et des colonnes n'altère pas la magie de ces lignes et de ces colonnes. *Mais les deux diagonales principales ne sont plus magiques.*
Dans un carré magique normal d'ordre n, il y a N = n! permutations possibles des lignes ou des colonnes qui n'altèrent pas la magie de celles-ci.
Par exemple, pour n = 4, N = 4! = 24.

	4	14	15	1	34
	9	7	6	12	34
	5	11	10	8	34
	16	2	3	13	34
34	34	34	34	34	34

	14	4	15	1	34
	7	9	6	12	34
	11	5	10	18	34
	2	16	3	13	34
14	34	34	34	34	46

	4	14	15	1	34
	9	7	6	12	34
	16	2	3	13	34
	5	11	10	8	34
14	34	34	34	34	22

Dans un carré magique normal d'ordre pair ou impair, les permutations successives, c'est-à-dire l'une après l'autre, de deux lignes et de deux colonnes, qui toutes les quatre sont à la même distance du centre de la grille, n'altèrent pas la magie du carré numérique obtenu. Dans l'exemple d'ordre n = 5 ci-dessous, il n'y a que deux solutions (N = 2).

[*] Un carré magique *normal* est constitué de tous les nombres entiers de 1 à n^2, où n est l'ordre du carré.

	2	8	24	11	20	65
	21	19	6	16	3	65
	23	7	5	12	18	65
	4	9	17	25	10	65
	15	22	13	1	14	65
65	65	65	65	65	65	65

Carré magique formateur

	2	11	24	8	20	65
	21	16	6	19	3	65
	23	12	5	7	18	65
	4	25	17	9	10	65
	15	1	13	22	14	65
65	65	65	65	65	65	65

Permutation des colonnes

	2	11	24	8	20	65
	4	25	17	9	10	65
	23	12	5	7	18	65
	21	16	6	19	3	65
	15	1	13	22	14	65
65	65	65	65	65	65	65

Permutation des lignes

	2	8	24	11	20	65
	21	19	6	16	3	65
	23	7	5	12	18	65
	4	9	17	25	10	65
	15	22	13	1	14	65
65	65	65	65	65	65	65

Carré magique formateur

	20	8	24	11	2	65
	3	19	6	16	21	65
	18	7	5	12	23	65
	10	9	17	25	4	65
	14	22	13	1	15	65
65	65	65	65	65	65	65

Permutation des colonnes

	14	22	13	1	15	65
	3	19	6	16	21	65
	18	7	5	12	23	65
	10	9	17	25	4	65
	20	8	24	11	2	65
65	65	65	65	65	65	65

Permutation des lignes

Le nombre N de solutions est donc N = $\frac{n}{2}$ pour les ordres pairs, et N = $\frac{n-1}{2}$ pour les ordres impairs.

La permutation des quartiers

La permutation simultanée en diagonale des quartiers, du carré magique normal *d'ordre n pair* (*n* = 2*k*) n'altère pas la magie du carré magique normal obtenu. Exemples :

	4	14	15	1	34
	9	7	6	12	34
	5	11	10	8	34
	16	2	3	13	34
34	34	34	34	34	34

	10	8	5	11	34
	3	13	16	2	34
	15	1	4	14	34
	6	12	9	7	34
34	34	34	34	34	34

	6	32	3	34	35	1	111
	7	11	27	28	8	30	111
	19	14	16	15	23	24	111
	18	20	22	21	17	13	111
	25	29	10	9	26	12	111
	36	5	33	4	2	31	111
111	111	111	111	111	111	111	111

	21	17	13	18	20	22	111
	9	26	12	25	29	10	111
	4	2	31	36	5	33	111
	34	35	1	6	32	3	111
	28	8	30	7	11	27	111
	15	23	24	19	14	16	111
111	111	111	111	111	111	111	111

Dans le carré magique *d'ordre impair* (n = 2k + 1), la permutation diagonale simultanée des quartiers doit être accompagnée de la permutation simultanée des branches opposées de la croix centrale, ces manipulations n'altérant pas la magie du carré magique obtenu. Exemple :

	2	8	24	11	20	65
	21	19	6	16	3	68
	23	7	5	12	18	65
	4	9	17	25	10	65
	15	22	13	1	14	65
65	65	65	65	65	65	65

	25	10	17	4	9	65
	1	14	13	15	22	65
	12	18	5	23	7	65
	11	20	24	2	8	65
	16	3	6	21	19	65
65	65	65	65	65	65	65

Notons que la case centrale est invariante.

Augmentation ou diminution des termes du carré magique

Un carré magique normal d'ordre n pair ou impair, reste magique lorsque l'on augmente ou diminue d'un même nombre chacun de ses termes.
Exemple d'ordre n = 4 ; facteur d'augmentation a = 3.

	4	14	15	1	34
	9	7	6	12	34
	5	11	10	8	34
	16	2	3	13	34
34	34	34	34	34	34

	7	17	18	4	46
	12	10	9	15	46
	8	14	13	11	46
	19	5	6	16	46
46	46	46	46	46	46

La nouvelle constante magique est augmentée du produit « *n.a* » par rapport à la constante magique d'origine, soit dans notre exemple : *n.a* = 4 x 3 = 12.

Remarque : une propriété particulière des carrés magiques d'ordre impair

Dans le cadre de cette manipulation, si l'on diminue chacun des termes de leur *moyenne arithmétique*, on introduit alors des termes négatifs, et l'on obtient une somme linéaire nulle. Exemple pour n = 5 ; la moyenne arithmétique est a = 325/25 = 13.

	24	4	8	9	20	65
	12	3	25	5	14	68
	7	21	13	5	19	65
	16	15	1	23	10	65
	6	22	18	17	2	65
65	65	65	65	65	65	65

	11	-9	-5	-4	7	0
	-1	-10	12	-2	1	0
	-6	8	0	-8	6	0
	3	2	-12	10	-3	0
	-7	9	5	4	-11	0
0	0	0	0	0	0	0

Lorsque cette moyenne arithmétique est elle-même située dans la case centrale de la grille, on observe alors certaines symétries des termes en valeurs absolue ; c'est le cas de l'exemple ci-dessus dans lequel on observe :

• une symétrie sur les diagonales principales par rapport au centre de la grille ;
• une symétrie dans les lignes et les colonnes en dehors des bordures, pour les termes situés notamment aux extrémités, et dans la croix centrale.

Ces symétries disparaissent lorsque cette moyenne arithmétique n'est pas dans la case centrale de la grille.

Les permutations figurées du carré magique

Un carré magique d'ordre pair ou impair reste magique ou semi-magique lorsque l'on ajoute ou retranche un même nombre aux termes situés sur une *permutation figurée*[*].

Exemple : soit un carré magique d'ordre n = 4 ; on ajoute a = 10 aux quatre termes d'une permutation figurée ; la constante magique initiale se trouve augmentée de « a ».

	4	**14**	15	1	34
	9	7	**6**	12	34
	5	11	10	8	34
	16	2	3	**13**	34
34	34	34	34	34	34

	4	**24**	15	1	44
	9	7	**16**	12	44
	15	11	10	8	44
	16	2	3	**23**	44
44	44	44	44	44	44

Dans notre exemple, n = 4, il y a N = 4! = 24 permutations figurées. On a donc vingt-quatre possibilités d'obtenir, par cette manipulation, un nouveau carré magique, non normal.

Cependant seules les permutations figurées ayant simultanément *une case sur chacune des deux diagonales principales* conduisent à un carré magique : c'est le cas de notre exemple ; les autres permutations figurées donnent un carré semi-magique.

Ainsi sur les vingt-quatre permutations figurées de quatre éléments sur le carré magique d'ordre n = 4, il n'y a que huit grilles qui remplissent les conditions énoncées ci-dessus. Voici ces huit permutations figurées « diagonales » :

1	15	14	4
12	6	7	**9**
8	**10**	11	5
13	3	**2**	16

1	15	14	4
12	6	**7**	9
8	10	11	**5**
13	**3**	2	16

1	15	**14**	4
12	6	7	9
8	**10**	11	5
13	3	2	**16**

1	15	14	**4**
12	6	7	9
8	10	**11**	5
13	**3**	2	16

1	**15**	14	4
12	6	**7**	9
8	10	11	5
13	3	2	**16**

1	15	14	**4**
12	**6**	7	9
8	10	11	5
13	3	**2**	16

1	**15**	14	4
12	6	7	**9**
8	10	**11**	5
13	3	2	16

1	15	**14**	4
12	**6**	7	9
8	10	11	**5**
13	3	2	16

Par ailleurs, on peut signaler que parmi les vingt-quatre permutations figurées dans le carré magique normal d'ordre n = 4, il y a également huit *permutations figurées magiques*, de

[*] Une *permutation figurée* est un ensemble de n cases telles que deux quelconques d'entre elles ne soient jamais situées dans une même ligne ou sur une même colonne.