SUJET 1 Antilles 2015

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.
Pour répondre, vous recopierez **sur votre copie** *le numéro de la question et la seule réponse choisie.*

Dans cet exercice, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Le temps d'attente en minute à un péage est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$ (exprimé en min^{-1}).
En moyenne une personne attend à ce péage :
a) 2 min   b) 5 min   c) 10 min   d) 20 min.

2. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -3 + \mathrm{i}3\sqrt{3}$ est :

a) $3e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ b) $6e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

c) $6e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ d) $-6e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

3. On considère le complexe $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
Le nombre complexe z^2 est égal à :
a) $z^2 = 2$ b) $z^2 = 4$ c) $.z^2 = -4$.   d) $z^2 = -4\mathrm{i}$.

Exercice 2

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Dans cet exercice, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

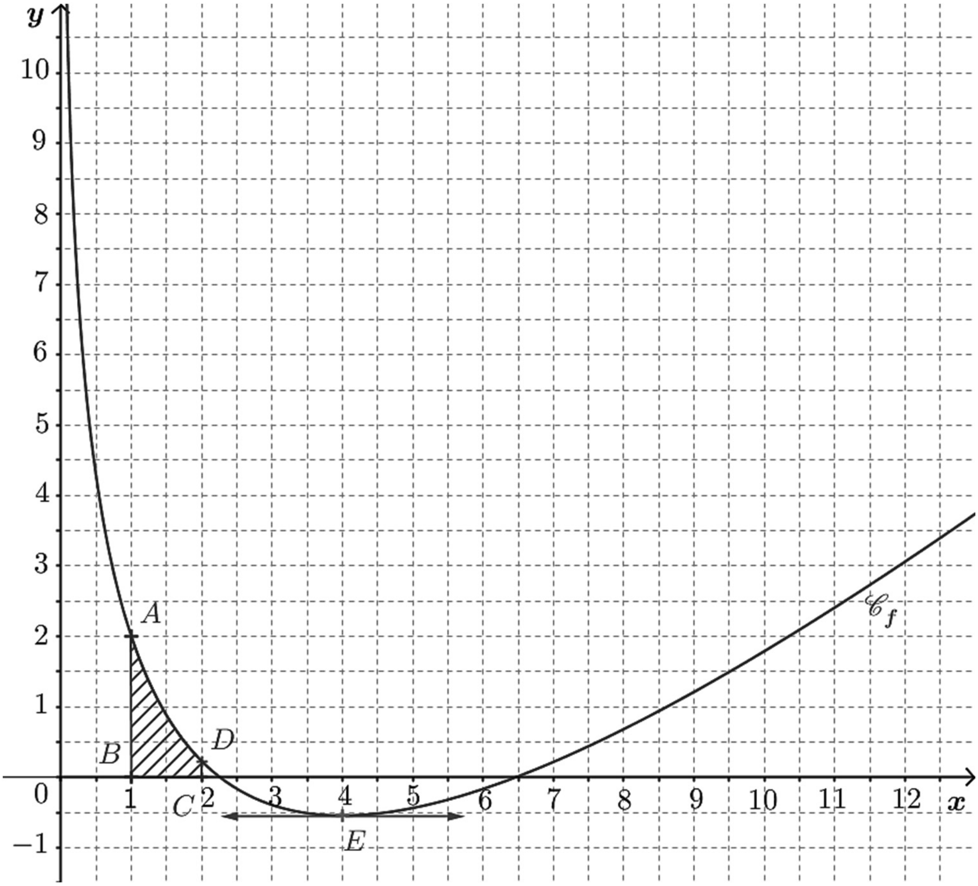
On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b\ln(x) + 1$$

où a et b sont deux nombres réels.

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.
Les points A et E sont deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Le point A a pour coordonnées (1 ; 2) et le point E a pour abscisse 4.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E est horizontale.



1. Déterminer $f(1)$ *et* $f'(4)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(4)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

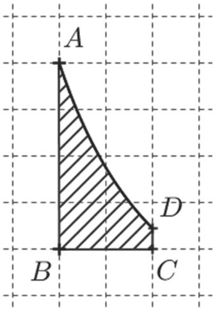
$$f(x) = x - 4\ln(x) + 1.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ en justifiant la réponse. Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ en justifiant la réponse (on pourra factoriser l'expression de $f(x)$ par x).
3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau des variations de f.

Partie C

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.

La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique de la page précédente.
On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.
Le point D est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (2 ; 0).
Soit la fonction G définie sur]0 ; +∞[par :



$$G(x) = x\ln(x) - x.$$

1. Calculer la dérivée G' de G.
2. En déduire une primitive F de la fonction f donnée dans la **partie B** sur]0 ; +∞[.
3. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la pièce en unité d'aire, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2}.

Exercice 3

ÉTUDE DE LA PRODUCTION DE PLATS PRÉPARÉS SOUS VIDE.

Les questions 1., 2. *et* 3. *de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à* 10^{-3}.

L'entreprise BUENPLATO produit en grande quantité des plats préparés sous vide.
L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité de cette production en exploitant divers outils mathématiques.

1. Sur les emballages, il est précisé que la masse des plats préparés est de 400 grammes. Un plat est conforme lorsque sa masse, exprimée en gramme, est supérieure à 394 grammes.
On note M la variable aléatoire qui, à chaque plat prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en gramme. On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale d'espérance 400 et d'écart type 5.

a) Déterminer la probabilité qu'un plat prélevé au hasard ait une masse comprise entre 394 et 404 grammes.

b) Déterminer la probabilité qu'un plat soit conforme.

2. Les plats préparés sont livrés à un supermarché par lot de 300.
On arrondit la probabilité de l'événement « un plat préparé prélevé au hasard dans la production n'est pas conforme » à 0,12.
On prélève au hasard 300 plats dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 300 plats, associe le nombre de plats préparés non conformes qu'il contient.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et en donner une interprétation.
c) Calculer la probabilité que dans un échantillon de 300 plats prélevés au hasard, au moins 280 plats soient conformes.

3. Le fabricant annonce sur les étiquettes de ses produits une proportion de produits non conformes de 12 %. On prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 1 200 dans lequel 150 plats se révèlent être non conformes.
a) Quelle est la fréquence de plats non conformes dans l'échantillon prélevé ?
b) Déterminer l'intervalle de fluctuation avec un niveau de confiance de 95 % de la fréquence de plats non conformes dans un échantillon de taille 1 200.
Rappel : *Lorsque la proportion p dans la population est connue, l'intervalle de fluctuation asymptotique à* 95 % *d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :*

$$I=\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

c) L'échantillon est-il représentatif de la production du fabricant ? Justifier.

Exercice 4

ÉTUDE DU DÉFICIT D'UNE MULTINATIONALE

Le déficit d'une multinationale a été de 15 millions d'euros en 2014.
Devant l'ampleur de ce déficit, l'équipe de direction décide de prendre des mesures afin de ramener ce déficit annuel à moins de 5 millions d'euros.
Jusqu'à ce que cet objectif soit atteint, cette équipe s'engage à ce que le déficit baisse de 8,6 % tous les ans.
On définit la suite (u_n) de la manière suivante : on note u_n le déficit **en million d'euros** de cette multinationale lors de l'année 2014 + n. Ainsi $u_0=15$.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1.
a) Montrer que $u_1=0{,}914u_0$.
b) Si l'équipe de direction tient ses engagements, quel sera le déficit de la multinationale en 2016 ?
c) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, puis exprimer u_n en fonction de n.

2.
a) Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue l'entier naturel n : $0{,}914^n\leq\frac{1}{3}$.
b) Quand l'engagement de l'équipe de direction, à savoir ramener le déficit de la multinationale au-dessous des 5 millions d'euros, sera-t-il atteint ?

3. On considère l'algorithme ci-dessous qui permet de retrouver le résultat de la question précédente.

```
Variables
    N : un entier naturel
    Q et U : deux nombre réels
Début
    N ← 0
    Q ← 0,914
    U ← 15
    Tant que … faire
        N ← …
        U ← …
    Fin Tant que
    Afficher …
Fin
```

a) Recopier et compléter les lignes en pointillé afin que l'algorithme renvoie l'année à partir de laquelle le déficit de cette multinationale sera ramené en dessous de 5 millions d'euros.

b) On suppose l'algorithme complété.
Proposer une modification de l'algorithme afin que celui-ci affiche le montant du déficit de cette multinationale **chaque année** jusqu'à ce que celui-ci soit ramené au-dessous de 5 millions d'euros.

4.

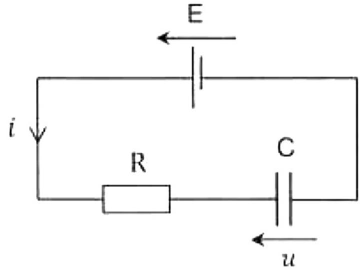
a) Calculer la somme des déficits sur onze ans à partir de l'année 2014 comprise, c'est-à-dire : $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

b) Construire un algorithme qui donne cette somme en sortie.

Exercice 5

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-contre composé de :

- une source de tension continue E de 10 V,
- une résistance R de 10^5 Ω,
- un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.



On note u la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t exprimé en seconde.
La fonction u est définie et dérivable sur [0 ; +∞[; elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\mathrm{RC}u' + u = \mathrm{E}$$

où u' est la fonction dérivée de u.

1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à :

$$u' + 10u = 100.$$

2.

a) Déterminer la forme générale $u(t)$ des solutions de cette équation différentielle.

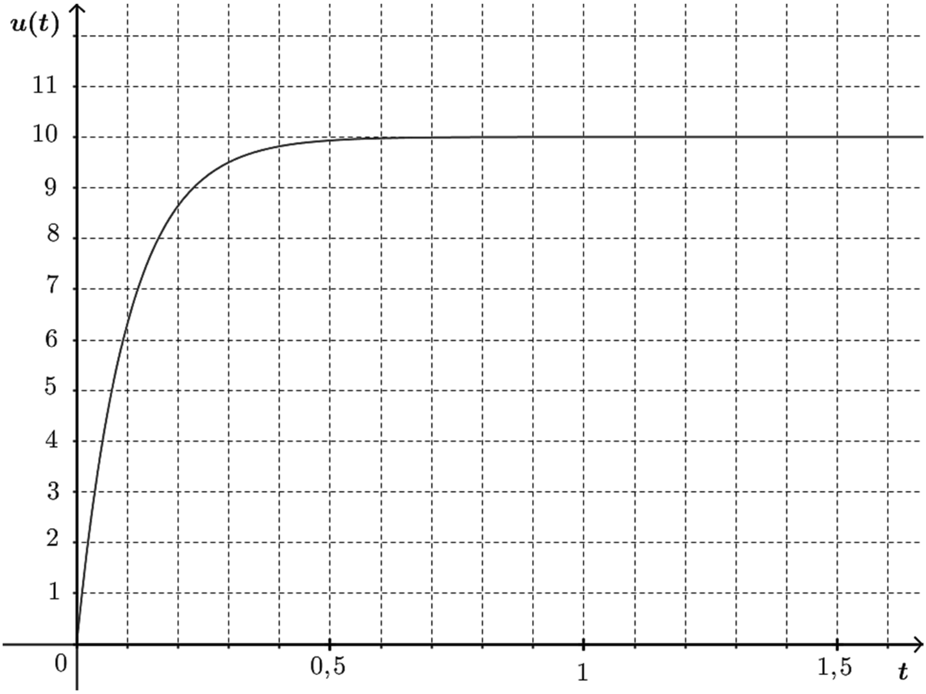
b) On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction u tel que $u(0) = 0$.

c) Déterminer en justifiant la réponse, la limite en $+\infty$ de la fonction u ainsi obtenue. En donner une interprétation.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction u qui vient d'être obtenue à la question 2.b) avec les unités suivantes :

1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses
et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées.

Charge du condensateur en fonction du temps



On appelle T le temps de charge en seconde pour que $u(\mathrm{T})$ soit égal à 95 % de E.

a) Déterminer graphiquement le temps de charge T.

b) Retrouver, par le calcul, le résultat précédent.

4. Sans modifier les valeurs respectives de E et de C, déterminer la valeur de R afin que le temps de charge T soit multiplié par 2.

SUJET 2 Métropole 2015

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1. On considère le nombre complexe $3e^{-i\frac{\pi}{6}}$. La forme algébrique du nombre complexe z est :

a) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ d) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$.

2. $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$. La forme exponentielle du nombre complexe $z_1 \times z_2$ est :

a) $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $-4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

c) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ d) $4e^{i\frac{\pi}{2}}$.

3. Les solutions de l'équation différentielle $y''+\frac{1}{3}y=0$ sont de la forme :

a) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}t^2$ b) $x \mapsto A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)+B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$

c) $t \mapsto Ae^{-\sqrt{3}t}$ d) $t \mapsto -\frac{1}{3}$.

4. La fonction f est définie sur l'intervalle]–1 ; +∞[par $f(x)=2+\frac{1}{x+1}$. La limite de cette fonction f en +∞ est égale à :

a) –∞ b) +∞ c) 0 d) 2.

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.

La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.
On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.
Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E, P_S et L est donnée par :

$$P_S = P_E \times \mathrm{e}^{-aL}$$

où a est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.

Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.

Dans tout l'exercice :

- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;
- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;
- pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

Partie A

Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire $a = 0{,}046$.
Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

Partie B

La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}035y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$.

2.

a) Sachant que $g(0) = 7$, vérifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 7\mathrm{e}^{-0{,}035x}$.

b) En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.

3.

a) Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4.

a) Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?

b) Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.