

□

Table des matières

I	Géométrie - Algèbre linéaire	1
1	Trigonométrie - Nombres complexes	3
1.1	Angles - Transformations affines planes	3
1.1.a	Angles de vecteurs	3
1.1.b	Angles de droites	4
1.1.c	Translation	4
1.1.d	Symétrie axiale	5
1.1.e	Homothétie	5
1.1.f	Rotation	6
1.1.g	Propriétés angulaires du cercle	7
1.1.h	Similitude directe	8
1.2	Trigonométrie	10
1.2.a	Définition des fonctions circulaires	10
1.2.b	Arcs associés	12
1.2.c	Compléments sur les projections	13
1.2.d	Formules fondamentales	14
1.2.e	Multiplication des arcs	15
1.2.f	Expression en fonction de la tangente de l'arc moitié	15
1.2.g	Formules de transformation	17
1.3	Structure de corps commutatif	18
1.4	L'ensemble des nombres complexes	21
1.4.a	Le corps des complexes	21
1.4.b	Conjugué	21
1.4.c	Définition géométrique	22
1.4.d	Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe	23
1.4.e	Linéarisation	24
1.4.f	Transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$	25
1.4.g	Utilisation des nombres complexes en géométrie	28
2	Courbes paramétrées	31
2.1	Définitions	31
2.2	Interprétation cinématique	32
2.3	Coniques à centre	33
2.4	Exemples de courbes paramétrées	38
2.5	Informatique : Courbes paramétrées	48

3 Compléments de géométrie	57
3.1 Espace et plan vectoriels euclidiens orientés	58
3.1.a Produit scalaire	58
3.1.b Produit vectoriel	59
3.1.c Bases orthonormées	60
3.2 Espace et plan affines euclidiens orientés	65
3.2.a Changement de repère dans \mathcal{P}	65
3.2.b Changement de repère dans \mathcal{E}	66
3.3 Barycentre	67
3.3.a Fonction vectorielle de Leibniz	67
3.3.b Barycentre	67
3.3.c Fonction scalaire de Leibniz	68
3.4 Plan affine euclidien	69
3.4.a Droites	69
3.4.b Equation normale d'une droite	71
3.4.c Cercles	72
3.5 Espace affine euclidien	74
3.5.a Plans	74
3.5.b Droites	76
3.5.c Orthogonalité dans l'espace	77
3.5.d Angle dièdre	79
3.5.e Distance de deux droites	79
3.5.f Sphères	82
3.5.g Cylindres	83
3.5.h Cônes	84
3.5.i Théorèmes de Dandelin	85
3.6 Informatique : Courbe de Bézier	86
4 Calcul Matriciel	93
4.1 Matrice à coefficients dans \mathbb{K}	93
4.1.a Définition	93
4.1.b Cas particuliers	94
4.2 Opérations sur les matrices	94
4.2.a Addition de deux matrices	94
4.2.b Produit d'une matrice par un scalaire	95
4.2.c Produit de deux matrices	95
4.2.d Puissance $r^{\text{ème}}$ d'une matrice	98
4.3 Transposition	104
4.3.a Définition	104
4.3.b Transposée d'une somme	104
4.3.c Transposée d'un produit	104
4.3.d Matrices symétriques et anti-symétriques	104
4.3.e Formes quadratiques	105

4.4	Informatique - Carrés magiques	107
5	Systèmes linéaires d'équations	117
5.1	Systèmes équivalents	117
5.1.a	Définitions	117
5.1.b	Matrice associée à un système linéaire	118
5.2	Technique du pivot de Gauss	118
5.2.a	Algorithme du pivot simple de Gauss	119
5.2.b	Conclusion	121
5.3	Résolution des systèmes linéaires	122
5.4	Interprétation géométrique des systèmes linéaires	125
5.4.a	Systèmes linéaires à 2 inconnues	125
5.4.b	Systèmes linéaires à 3 inconnues	126
5.5	Rang d'une matrice	126
5.6	Matrices carrées inversibles	127
5.6.a	Introduction	127
5.6.b	Matrice carrée inversible	129
5.6.c	Recherche pratique de l'inverse d'une matrice	129
5.7	Informatique	132
5.7.a	Matrices mal conditionnées	132
5.7.b	Réduction de Gauss-Jordan	136
5.7.c	MatLab et les systèmes	137
6	Espace vectoriel \mathbb{K}^n	139
6.1	Introduction	139
6.1.a	Les vecteurs de la géométrie	139
6.1.b	Espace vectoriel \mathbb{K}^n	139
6.1.c	Sous espaces vectoriels	140
6.2	Familles de vecteurs - Bases	142
6.2.a	Base canonique	142
6.2.b	Equation fondamentale	143
6.2.c	Matrice d'une famille finie	144
6.2.d	Nature des familles finies	145
6.2.e	Bases de \mathbb{K}^n	147
6.3	Caractérisation des sous espaces vectoriels de \mathbb{K}^n	148
6.3.a	Une approche du problème	148
6.3.b	Cas général	150
7	Applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^p	157
7.1	Définitions	157
7.1.a	Application linéaire	157
7.1.b	Interprétation dans les bases canoniques	158
7.1.c	Transposée d'une application linéaire	159

7.2	Image et noyau	160
7.2.a	Définitions	160
7.2.b	Injectivité, surjectivité, bijectivité	161
7.2.c	Equation de $\text{Im } \varphi$ et de $\text{ker } \varphi$	161
7.3	Opérations sur les applications linéaires	165
7.3.a	Addition	165
7.3.b	Multiplication par un scalaire	165
7.3.c	Composition d'applications linéaires	166
7.3.d	Produit de deux matrices	166
7.4	Cas des endomorphismes	167
7.4.a	Propriété particulière des endomorphismes	167
7.4.b	Matrice de l'application réciproque	168
7.4.c	Groupe linéaire	170
II Analyse		175
1 Fonctions polynômes		177
1.1	Structures des polynômes	177
1.1.a	Définitions.	177
1.1.b	Espace vectoriel	178
1.1.c	Produit de polynôme	178
1.1.d	Propriétés des degrés	179
1.2	Formule de Taylor pour les polynômes	179
1.3	Racines d'un polynôme	182
1.3.a	Equation du second degré dans \mathbb{C}	182
1.3.b	Théorème de d'Alembert	184
1.3.c	Zéro d'ordre r	184
1.3.d	Factorisation dans \mathbb{C}	185
1.3.e	Factorisation dans \mathbb{R}	186
1.3.f	Relations coefficients et zéros	187
1.4	Informatique : Equation du 3 ^{ème} degré	192
2 Suites numériques		201
2.1	Compléments sur \mathbb{R} et \mathbb{C}	201
2.1.a	Ordre - Axiome de la borne supérieure	201
2.1.b	Valeur absolue	203
2.1.c	Intervalle	203
2.1.d	Partie entière	204
2.2	Suites numériques	205
2.2.a	Définitions	205
2.2.b	Convergence	206
2.3	Propriétés des suites numériques convergentes	208

2.3.a	Unicité de la limite	208
2.3.b	Points fixes	208
2.3.c	Compléments sur les suites convergentes	209
2.3.d	Théorème des suites monotones	210
2.3.e	Suites adjacentes	211
2.3.f	Suites extraites	213
2.4	Suites définies par récurrence	215
2.4.a	Récurrence de pas 1	215
2.4.b	Récurrence de pas 2	220
3	Algorithmique	233
3.1	Un exemple d'algorithme	233
3.2	Introduction	234
3.2.a	Etape 1 : Etude du problème- Algorithme	234
3.2.b	Etape 2 : Organigramme	234
3.2.c	Etape 3 : Pseudo- code	234
3.2.d	Etape 4 : Programmation dans un langage	234
3.3	Equation du second degré	234
3.3.a	Résolution avec MatLab	234
3.3.b	Etude mathématique et algorithme	235
3.3.c	Organigramme	237
3.3.d	Programmation en MatLab	237
3.4	Itération	239
3.4.a	Algorithme	239
3.4.b	Organigramme	239
3.4.c	Programme en MatLab	239
3.4.d	Suites récurrentes linéaires doubles	240
3.4.e	Méthode babylonienne de calcul d'une racine carrée	242
4	Généralités sur les fonctions	245
4.1	Définitions	245
4.1.a	Ensemble de définition	245
4.1.b	Sens de variation	245
4.1.c	Bijection	246
4.2	Réduction de l'intervalle d'étude	247
4.2.a	Parité	247
4.2.b	Symétries	248
4.2.c	Changement de repère par translation	250
4.2.d	Période	251
5	Limites	253
5.1	Limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$	253
5.1.a	Voisinage dans $\overline{\mathbb{R}}$	253

5.1.b	Adhérence d'un intervalle	253
5.1.c	Définition générale	254
5.1.d	Etude des différents cas	254
5.1.e	Théorèmes généraux sur les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$	260
5.1.f	Comportement du logarithme et de l'exponentielle en $x = 0$ et $x = +\infty$	263
5.2	Fonctions équivalentes	265
5.2.a	Introduction aux développements limités	265
5.2.b	Fonctions dominées	266
5.2.c	Fonctions négligeables	268
5.2.d	Fonctions équivalentes	272
5.2.e	Théorèmes généraux	274
5.2.f	Branches infinies	277
6	Continuité	283
6.1	Généralités	283
6.1.a	Définitions	283
6.1.b	Exemples utilisant la condition suffisante	284
6.2	Théorèmes généraux	285
6.2.a	Espace vectoriel	285
6.2.b	Produit	286
6.2.c	Quotient	286
6.2.d	Puissance	287
6.2.e	Composée	288
6.3	Propriétés des fonctions continues	289
6.3.a	Dichotomie	289
6.3.b	Image d'un intervalle	292
6.3.c	Fonctions continues et strictement monotones	293
6.3.d	Fonctions continues par morceaux	293
6.4	Fonctions puissances	294
6.4.a	Cas $\alpha > 0$	295
6.4.b	Cas $\alpha < 0$	296
6.5	Fonctions circulaires réciproques	296
6.5.a	Fonction arcsin	296
6.5.b	Fonction arccos	298
6.5.c	Fonction arctan	300
6.5.d	Compléments pour MuPad	305
6.6	Informatique	306
7	Dérivées et différentielles	309
7.1	Définitions. Premières propriétés	309
7.1.a	Dérivée en un point	309
7.1.b	Interprétation géométrique	310

7.1.c	Différentielle	315
7.2	Propriétés des fonctions dérivables	315
7.2.a	Continuité et dérivabilité	315
7.2.b	Fonctions de classe C^1 sur \mathcal{I}	315
7.2.c	Algèbre des fonctions dérivables	316
7.2.d	Composition de fonctions dérivables	318
7.3	Théorème de Rolle - Accroissements finis	326
7.3.a	Propriétés graphiques	326
7.3.b	Inégalité des accroissements finis	331
7.3.c	Application au sens de variation des fonctions	334
7.4	Fonctions de classe C^n	334
7.4.a	Dérivée seconde	334
7.4.b	Dérivée $n^{\text{ème}}$	336
7.4.c	Formule de Leibniz	336
7.4.d	Formules de Taylor	337
8	Développements limités	343
8.1	Définition	343
8.2	Utilisation d'intégrations successives	343
8.3	Utilisation de Taylor-Young	344
8.3.a	Développement limité à l'ordre n	344
8.3.b	Exemples fondamentaux	345
8.4	Propriétés	348
8.4.a	Unicité du $DL_n(0)$ et parité	348
8.4.b	Combinaisons linéaires	349
8.4.c	Produits	349
8.4.d	Inverse	350
8.4.e	Composition de dl	351
8.4.f	Dérivation et/ou intégration	353
8.5	Compléments	355
8.5.a	Théorème de la division	355
8.6	Informatique	359
8.6.a	TP 1 : Multiprécision	360
8.6.b	TP 2 : Programme Calcul_Pi avec n décimales	365
9	Fonctions logarithmes et exponentielles	369
9.1	Fonctions logarithmes	369
9.2	Fonction exponentielle de base a	372
9.3	Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses	373
10	Intégrale sur un segment	393
10.1	Somme de Riemann	393
10.1.a	Suite associée à une subdivision	393

10.1.b	Fonction intégrable au sens de Riemann	393
10.2	Fonctions Intégrables	395
10.2.a	Fonction en escalier	395
10.2.b	Fonctions continues et continues par morceaux	399
10.3	Primitives	403
10.3.a	Fonction primitive	403
10.3.b	Dictionnaire des primitives	406
10.3.c	Exemples fondamentaux	406
10.4	Techniques de Calcul	407
10.4.a	Décomposition en éléments simples	407
10.4.b	Intégration par parties	410
10.4.c	Changement de variable ou substitution	415
10.4.d	Fractions rationnelles trigonométriques	431
10.4.e	Intégrales de Wallis	433
10.4.f	Intégrale fonction des bornes	436
10.5	Valeurs approchées d'une intégrale	438
10.5.a	Introduction	438
10.5.b	Méthode des trapèzes	439
10.5.c	Méthode de Simpson	441
10.6	Séries de Fourier	442
10.6.a	Base orthonormée de \mathbb{L}_n^2	443
10.6.b	Séries trigonométriques	444
10.7	Informatique : convergence de Fourier	445
10.7.a	Signal rectangulaire	445
10.7.b	Signal en dent de scie	447
11 Equations différentielles linéaires		449
11.1	Généralités	449
11.1.a	Introduction	449
11.1.b	Théorème fondamental	450
11.2	Equations du premier ordre	452
11.2.a	Equations homogènes de la forme $Y' + a(x) Y = 0$	452
11.2.b	Equations de la forme $y' + a(x) y = b(x)$	453
11.3	Equations du second ordre à coefficients constants	456
11.3.a	Equations homogènes	456
11.3.b	Equations avec second membre	459
11.4	Mouvements vibratoires simples	466
11.4.a	Mouvement vibratoire simple	466
11.4.b	Construction de Fresnel	467

12 Fonctions de plusieurs variables	475
12.1 Définitions et exemples	475
12.1.a Introduction	475
12.1.b Domaine de définition	476
12.1.c Surfaces d'équation $z = f(x, y)$	477
12.1.d Accroissements partiel et total	477
12.2 Limite et continuité	478
12.3 Différentiation	480
12.3.a Dérivées partielles	480
12.3.b Relation entre différentielle et accroissement total	482
12.3.c Plan tangent	483
12.3.d Calculs approchés	484
12.3.e Dérivées partielles seconde	485
12.3.f Extremum	486
12.4 Forme différentielle d'ordre 1	487
12.5 Résolution de systèmes d'équations non linéaires	491
III Probabilités	493
1 Statistique descriptive	495
1.1 Variable statistique	495
1.2 Représentation graphique	497
1.2.a Diagramme en bâton	497
1.2.b Histogramme	498
1.2.c Courbe des fréquences relatives cumulées d'une v.s.d	498
1.2.d Courbe des fréquences relatives cumulées d'une v.s.c	499
1.3 Paramètres de position et de dispersion	500
1.3.a Moyenne	500
1.3.b Médiane et quartile	502
1.3.c Moment d'ordre h	503
1.3.d Ecart absolu	503
1.3.e Variance et écart type	504
1.3.f Compléments	505
1.4 Informatique - Paramètres d'une v.s.d	506
2 Ensembles et informatique	509
2.1 Ensembles dénombrables	509
2.1.a Ensemble fini	509
2.1.b Ensemble strictement dénombrable	509
2.2 Opérations sur les ensembles	510
2.2.a Sous ensembles de Ω	510
2.2.b Ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des sous ensembles de Ω	510

2.2.c	Structures de $\mathcal{P}(\Omega)$	511
2.2.d	Partition de Ω	516
2.2.e	Produit cartésien d'ensembles	516
2.3	Propriétés des cardinaux	516
2.3.a	Relation entre les cardinaux	516
2.3.b	Formule du crible	517
2.4	Codage des informations	518
2.4.a	Le transistor NPN	518
2.4.b	Circuits fondamentaux	519
2.4.c	Système binaire	520
2.4.d	Système hexadécimal	521
2.4.e	Table ASCII	522
2.5	Opérations arithmétiques	522
2.5.a	Opérations logiques	523
2.5.b	Additionneur binaire	523
2.5.c	Nombres négatifs	524
2.6	Généralités sur les ordinateurs	526
2.6.a	Principe	526
2.6.b	Configuration d'un ordinateur	526
2.7	Informatique : Fonctions logiques	527
3	Analyse combinatoire	533
3.1	Arrangement - Permutation	533
3.1.a	Arrangement	533
3.1.b	Permutation	533
3.2	Combinaisons	534
3.2.a	Combinaison	534
3.2.b	Formule récursive	535
3.2.c	Approximation de Stirling de $n!$	536
3.3	Formules de dénombrement	536
3.3.a	Formule fondamentale	536
3.3.b	Formule de Pascal-Tartaglia	536
3.3.c	Formule du binôme	537
3.3.d	Triangle arithmétique	540
3.3.e	Formule hypergéométrique	542
4	Introduction aux probabilités	547
4.1	Axiomatique des probabilités	547
4.1.a	Univers probabilisé	547
4.1.b	Système complet d'événements	548
4.1.c	Propriétés.	549
4.1.d	Formule de Laplace	551
4.2	Probabilités conditionnelles	552

4.2.a	Définition et propriétés	552
4.2.b	Arbres stochastiques	554
4.2.c	Formule de Bayes	554
4.2.d	Indépendance	555
5	Variables aléatoires discrètes	563
5.1	Définitions	563
5.1.a	Variable aléatoire	563
5.1.b	Valeurs prises par une variable aléatoire	564
5.1.c	Loi d'une v.a.d	565
5.1.d	Densité et fonction de répartition d'une v.a.d	565
5.2	Algèbre des variables aléatoires discrètes	566
5.2.a	Introduction fondamentale	566
5.2.b	Couple	567
5.2.c	Combinaisons linéaires de v.a.d	568
5.2.d	Produit de v.a.d	569
5.2.e	Indépendance de v.a.d	569
5.2.f	Loi conditionnelle	570
5.3	Propriétés des v.a.d	572
5.3.a	Moments d'une v.a.d	572
5.3.b	Propriété de l'espérance de v.a.d	573
5.3.c	Variance de v.a.d	574
5.3.d	Covariance de deux v.a.d	575
5.3.e	Corrélation linéaire de deux v.a.d	576
5.3.f	Régression linéaire	577
6	Lois discrètes de probabilités	591
6.1	Aléa de Bernoulli	592
6.1.a	Définition	592
6.1.b	Moments	592
6.2	Loi binomiale	592
6.2.a	Définition	592
6.2.b	Représentation graphiques	593
6.2.c	Valeurs modales	594
6.2.d	Moments	595
6.2.e	Sommes de lois binomiales	596
6.2.f	Compléments importants	597
6.3	Loi hypergéométrique	599
6.3.a	Définition	599
6.3.b	Moments	600
6.3.c	Valeurs modales	601
6.4	Loi uniforme	606
6.4.a	Définition	606

6.4.b	Moments	606
6.5	Loi géométrique	606
6.5.a	Introduction	606
6.5.b	Moments	608
6.6	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	615
6.6.a	Inégalité de Markov	615
6.6.b	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	615
6.7	Informatique	616
6.7	Informatique	616

Programme d'Informatique 2003	619
--------------------------------------	------------

Programme de Mathématiques 2003	622
----------------------------------------	------------

Index	633
--------------	------------