Chapitre 1

Trigonométrie - Nombres complexes

Quelques rappels et compléments sur les transformations affines planes, sur les formules de trigonométrie et sur les nombres complexes.

$\mathbb{P}$ *désigne le plan vectoriel euclidien et* $\mathcal{P}$ *le plan affine associé.*

1.1 Angles - Transformations affines planes

1.1.a Angles de vecteurs

L'orientation choisie est celle du sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Si nous considérons le cercle trigonométrique de centre O et de rayon $R = 1$ alors la détermination principale θ de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est la longueur algébrique de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.

Nous notons $\theta = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

La valeur de θ est en radians[#1] *et il est clair que $\theta + 2\,k\,\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une autre détermination de cet angle.*

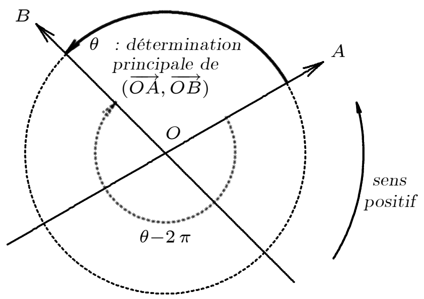

FIG. 1.1 – Angles de vecteurs.

Ainsi $+\dfrac{\pi}{6}$ et $-11\,\dfrac{\pi}{6}$ représentent le même angle.

Nous dirons que la mesure d'un angle de deux vecteurs est définie modulo $2\,\pi$, noté $[\mathrm{mod}\ 2\,\pi]$.

Sauf cas particulier, nous n'utiliserons que les radians.

Théorème 1.1

Nous avons les propriétés suivantes :

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$	$= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$	relation de Chasles
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$	$= 0 + 2\,k\,\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$	angle nul
$(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$	$= \pi + 2\,k\,\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$	angle plat
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$	$= -\,(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$	angles opposés

valable pour les angles de vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Preuve :

Immédiat. ∎

[#1] Les mesures des angles sont exprimées en radians de 0 à $2\,\pi$ ou en dégrés de $0°$ à $360°$ ou en grades de 0gr à 400gr.

Le grade a été défini sous la révolution française de 1789 en harmonie avec le système métrique.

1.1.b Angles de droites

L'angle des deux droites $A'A$ et $B'B$ est défini par l'un des deux angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ *ou* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}\right)$.
Il est clair que $\theta + k\,\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une autre détermination de cet angle.
Ainsi $+\dfrac{\pi}{6}$ et $-5\,\dfrac{\pi}{6}$ représentent le même angle de droites.
Nous dirons que la mesure d'un angle de deux droites est définie modulo π, noté $[\mathrm{mod}\ \pi]$.

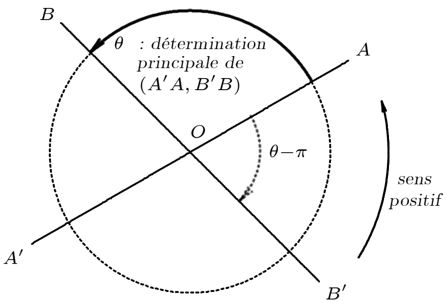

FIG. 1.2 – Angles de droites.

Ainsi pour quatre points distincts A, B, C et D, les angles (AB, CD) et (AI, CD) sont égaux si I appartient à la droite AB.

Théorème 1.2

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll} (U, V) + (V, W) & = (U, W) & \text{relation de Chasles} \\ (U, U) & = 0 + k\,\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} & \text{angle nul ou plat} \\ (U, V) & = -\,(V, U) & \text{angles opposés} \end{array}$$

valable pour les angles des droites U, V et W.

Preuve :
Immédiat. ∎

Exercice 1.1

Si les droites D et D' sont respectivement perpendiculaires aux droites Δ et Δ' alors

$$(D, D') = (\Delta, \Delta')\,.$$

Corrigé :
Il suffit d'écrire, en utilisant la relation de Chasles,

$$(D, D') = (D, \Delta) + (\Delta, \Delta') + (\Delta', D') = (\Delta, \Delta') \quad [\mathrm{mod}\ \pi]$$

car $(D, \Delta) = (\Delta', D') = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.1

D et D' deux droites (distinctes) concourantes en un point O.
Nous appelons bissectrice de l'angle (D, D') toute droite Δ passant par O telle que $(D, \Delta) = (\Delta, D')$.

Théorème 1.3

L'angle (D, D') admet deux bissectrices Δ et Δ' perpendiculaires.

Preuve :
Si $\theta = (D, D')$ et $\mu = (D, \Delta) = (\Delta, D')$ alors $2\,\mu = \theta + k\,\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Et le résultat après division par 2. ∎

1.1.c Translation

Définition 1.2

Un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbf{P}$, fixé. La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ est l'application qui au point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M) \in \mathcal{P}$ défini par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $t_{\overrightarrow{0}}$ est l'identité.

Théorème 1.4

> M, N et Q trois points (non alignés) de $\mathcal{P}$. Si $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$, $N' = t_{\overrightarrow{u}}(N)$ et $Q' = t_{\overrightarrow{u}}(Q)$ alors les triangles MNQ et $M'N'Q'$ sont directement égaux [#2].
> En particulier le quadrilatère $MNN'M'$ est un parallélogramme.

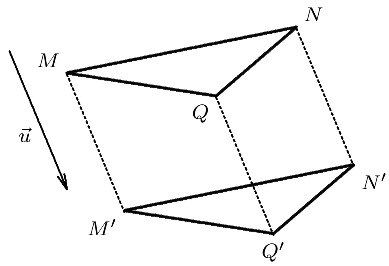

FIG. 1.3 – Représentation de $t_{\overrightarrow{u}}$.

Preuve :
Immédiat avec la figure (Propriété de **Thalés de Millet** [#3]). ∎

1.1.d Symétrie axiale

Définition 1.3

> *Une droite $\Delta \subset \mathcal{P}$, fixée. La symétrie axiale s_Δ, par rapport à Δ, est l'application qui au point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' = s_\Delta(M) \in \mathcal{P}$ défini par la construction suivante :*
> *Si $M \in \Delta$ alors $M' = M$ sinon Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.*

Les points M de Δ sont dits invariants car $s_\Delta(M) = M$, pour tout $M \in \Delta$.

Théorème 1.5

> M, N et Q trois points (non alignés) de $\mathcal{P}$. Si $M' = s_\Delta(M)$, $N' = s_\Delta(N)$ et $Q' = s_\Delta(Q)$ alors les triangles MNQ et $M'N'Q'$ sont inversement égaux [#4].

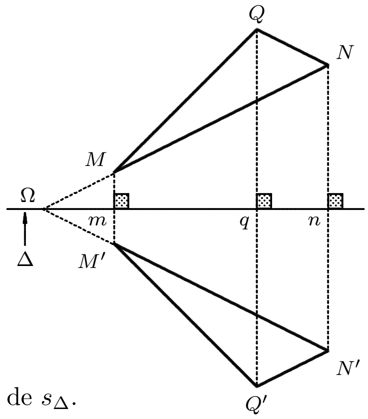

FIG. 1.4 – Représentation de s_Δ.

Preuve :
Immédiat avec la figure. ∎

1.1.e Homothétie

Définition 1.4

> *Un point $I \in \mathcal{P}$ et un réel $k \neq 0$, fixés. L'homothétie $\hom_{I,k}$, de centre I et de rapport k, est l'application qui au point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' = \hom_{I,k}(M) \in \mathcal{P}$ défini par $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.*

Le point I est invariant car $\hom_{I,k}(I) = I$ et de plus $\hom_{I,1}$ est l'identité de $\mathcal{P}$.

[#2] Deux triangles directement égaux ont leurs côtés et leurs angles respectifs égaux.
[#3] Thalés de Millet 625 - 547 av JC.
[#4] Deux triangles inversement égaux ont leurs côtés respectifs égaux et leurs angles respectifs opposés.

Théorème 1.6

> M, N et Q trois points (non alignés) de $\mathcal{P}$. Si $M' = \mathrm{hom}_{I,\,k}\,(M)$, $N' = \mathrm{hom}_{I,\,k}\,(N)$ et $Q' = \mathrm{hom}\,(Q,\,k)$ alors les triangles MNQ et $M'N'Q'$ sont homothétiques [#5].

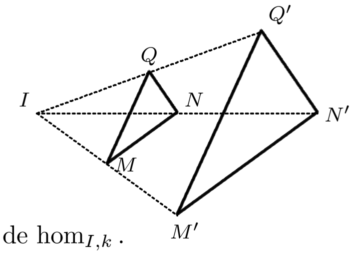

FIG. 1.5 – Représentation de $\mathrm{hom}_{I,k}$.

Preuve :
Immédiat avec la figure. ∎

1.1.f Rotation

Définition 1.5

> *Un point $I \in \mathcal{P}$ et un réel θ, fixés. La rotation $\mathrm{rot}_{I,\,\theta}$ de centre I et d'angle θ, est l'application qui au point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' = \mathrm{rot}_{I,\,\theta}\,(M) \in \mathcal{P}$ défini par $IM' = IM$ et $\left(\overrightarrow{IM},\,\overrightarrow{IM'}\right) = \theta$.*

Si $\theta = (2\,k+1)\,\pi$ alors $\mathrm{rot}_{I,\,(2\,k+1)\,\pi}$ est la symétrie par rapport au point I et si $\theta = 2\,k\,\pi$ alors $\mathrm{rot}_{I,\,2\,k\,\pi}$ est l'identité, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.7

> M, N et Q trois points (non alignés) de $\mathcal{P}$. Si $M' = \mathrm{rot}_{I,\,\theta}\,(M)$, $N' = \mathrm{rot}_{I,\,\theta}\,(N)$ et $Q' = \mathrm{rot}_{I,\,\theta}\,(Q)$ alors les triangles MNQ et $M'N'Q'$ sont directement égaux.

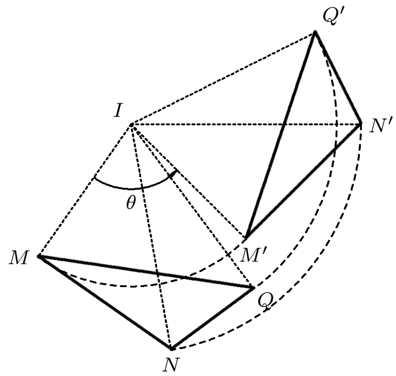

FIG. 1.6 – Représentation de $\mathrm{rot}_{I,\,\theta}$.

Preuve :
Immédiat avec la figure ∎

Exercice 1.2

Δ et Δ' deux droites distinctes de $\mathcal{P}$. Montrer que la composée de deux symétries axiales est une translation si Δ et Δ' sont parallèles ou une rotation si Δ et Δ' sont concourantes.

Corrigé :
Il suffit de faire un dessin

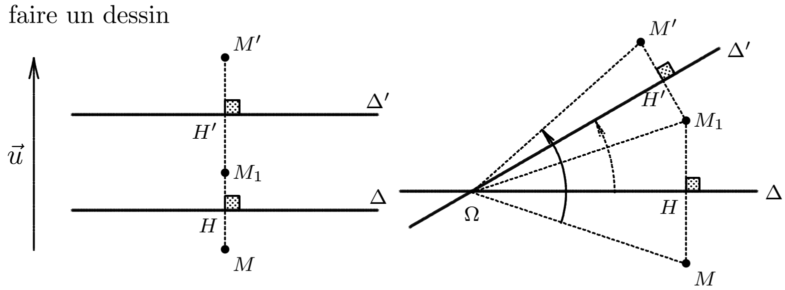

FIG. 1.7 – Composée de deux symétries axiales.

Nous avons si Δ et Δ' sont parallèles

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}\,(M) = s_{\Delta'}\,(M_1) = M'$$

et ainsi $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{u}$, car H est le milieu de $[MM_1]$ et H' celui de $[M_1M']$.

[#5] Deux triangles homothétiques ont leurs côtés respectifs proportionnels en grandeur et sens et leurs angles respectifs égaux.

Nous avons si Δ et Δ' sont concourantes au point Ω

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) &= \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OH}\right) + \left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM_1}\right) + \left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OH'}\right) + \left(\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OM'}\right) \\ &= 2\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM_1}\right) + 2\left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OH'}\right) && \text{Symétrie axiale} \\ &= 2\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}\right) = 2\,(\Delta, \Delta') && \text{Relation Chasles}\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du passage d'un angle de vecteur modulo 2π, au double d'un angle de droite modulo π.

1.1.g Propriétés angulaires du cercle

Théorème 1.8 *:*

Soient A, B et M trois points distincts situés sur un cercle de centre O.
Nous avons
$$(MA,\, MB) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right).$$
Attention l'égalité à lieu modulo π.

Preuve :

Ce théorème exprime que pour tout point M du cercle, l'angle $(MA,\, MB)$ est constant.

Nous dirons que cet angle intercepte l'arc orienté $\widehat{AB}$.

Si Δ_A et Δ_B sont les médiatrices respectives des droites MA et MB alors l'**exercice 1.1** prouve que

$$(MA,\, MB) = (\Delta_A,\, \Delta_B)\,.$$

La symétrie axiale s_{Δ_A}, d'axe Δ_A, transforme A en M et la symétrie axiale s_{Δ_B}, d'axe Δ_B, transforme M en B, donc d'après l'**exercice 1.2**, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $2\,(\Delta_A,\, \Delta_B) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

Remarquer que la propriété est vraie pour N, situé sur l'autre arc $\widehat{AB}$ que M.

Si Δ est la médiatrice du segment $[AB]$ alors $(OA,\, \Delta) = (AT,\, AB)$ comme angles de droites à côtés respectivement perpendiculaires, ce qui prouve que la propriété précédente est encore vraie lorsque M est confondu avec A, dans ce cas la droite MA devient la tangente AT en A au cercle.

Quelques petits secrets pour la construction ci-dessus avec le logiciel **PiCTEX.**
Nous avons besoin pour tracer la médiatrice Δ_A du segment $[AM]$ de connaître l'équation cartésienne de la droite AM.
O est origine, $A = (-0.866,\, -0.500)$ et $M = (0.259,\, 0.966)$, résultant des valeurs $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}\right) = 120°$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM}\right) = 75°$.

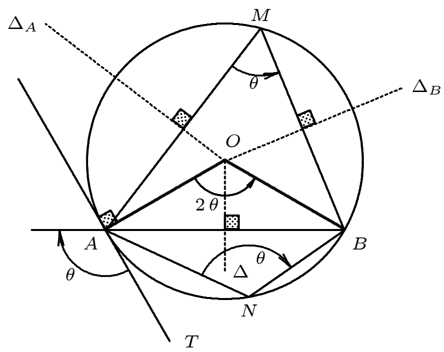

FIG. 1.8 – Angles inscrits et angle au centre.

Avec **MuPad** nous avons les instructions suivantes qui permettent de déterminer les valeurs a et b de l'équation $y = a\,x + b$, de la droite (AM).

- **f := x -> a*x + b :**
- **solve({f(-0.866) = -0.500, f(0.259) = 0.966}, {a, b}) ;**

$$\{a = 1.303111111, b = 0.6284942222\}$$

facile ! ∎

Exercice 1.3

1. *A et B deux points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$, et θ un réel non nul donné, avec $-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.*
Etablir que l'ensemble des points du plan tels que

$$(MA,\, MB) = \theta \quad [\text{mod } \pi]$$

est un cercle Γ passant par A et B.
On précisera la construction du centre O de Γ.

2. *Soient quatre points A, B, C et D distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$.*
Etablir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ces quatre points soient cocycliques ou alignés est que

$$(AC,\, AD) = (BC,\, BD)\,.$$

Corrigé :

1. Notons $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } (MA,\, MB) = \theta\}\,.$
Nous raisonnons par analyse (étude des propriétés des points de $\mathcal{E}$) et synthèse (détermination de $\mathcal{E}$).
Analyse : Si $M_0 \in \mathcal{E}$ alors les points M_0, A et B ne sont pas alignés car $\theta \neq 0$.
Ils déterminent un cercle Γ de centre O tel que d'après le **théorème 1.8**

$$(M_0A,\, M_0B) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\, \overrightarrow{OB}\right) = \theta$$

et ainsi $\mathcal{E} \subset \Gamma$.
Synthèse : Le même théorème prouve que si $M_1 \in \Gamma$ alors

$$(M_1A,\, M_1B) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\, \overrightarrow{OB}\right) = \theta$$

et ainsi $\Gamma \subset \mathcal{E}$.
Construction du centre O de Γ.
Nous traçons la tangente AT telle $(AT,\, AB) = \theta$ et la médiatrice Δ du segment $[AB]$.
Le point O est l'intersection de Δ et du rayon R de Γ passant par A (nous rappelons que OA est perpendiculaire en A à la tangente AT).

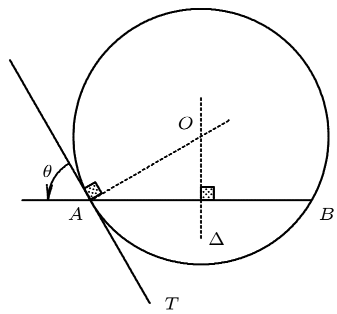

FIG. 1.9 – Construction du centre O de Γ.

2. **Condition nécessaire**.
Si les points A, B, C et D sont alignés alors $(AC,\, AD) = (BC,\, BD) = 0$.
Si les points A, B, C et D sont cocycliques alors $(AC,\, AD) = (BC,\, BD)$, d'après la question **1.**
Condition suffisante.
Si $(AC,\, AD) = (BC,\, BD) = 0$ alors les points sont alignés.
Si $(AC,\, AD) = (BC,\, BD) = \theta \neq 0$ alors les points A, B, C et D sont cocycliques, d'après la question **1.**

1.1.h Similitude directe

Définition 1.6

> *Un point $I \in \mathcal{P}$ et deux réels $k > 0$ et θ, fixés.*
> *La similitude*[#6] $\text{sim}_{I,\,\theta,\,k}$*, de centre I, d'angle θ et de rapport k, est la composée (commutative) de* $\text{rot}_{I,\,\theta}$ *et de* $\text{hom}_{I,\,k}$.

[#6] La similitude ainsi définie est qualifiée de directe car elle conserve l'égalité algébrique des angles.

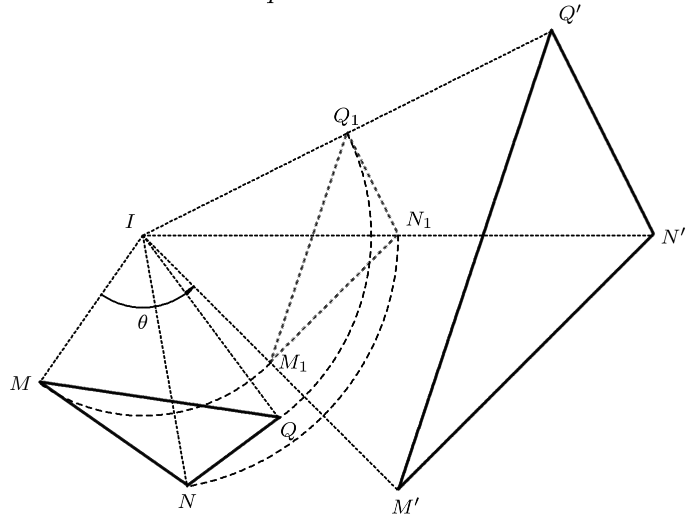

FIG. 1.10 – Représentation de $\mathrm{sim}_{I,\,\theta,k}$.

Il est toujours possible de choisir $k > 0$, s'il n'en est pas ainsi il suffit d'ajouter π à l'angle de la rotation.

Théorème 1.9

M, N et Q trois points (non alignés) de $\mathcal{P}$.
Si $M' = \mathrm{sim}_{I,\,\theta,\,k}\ (M)$, $N' = \mathrm{sim}_{I,\,\theta,\,k}\ (N)$ et $Q' = \mathrm{sim}_{I,\,\theta,\,k}\ (Q)$ alors les triangles MNQ et $M'N'Q'$ sont directement semblables[#7].

Preuve :

La figure est obtenue avec la composée (dans l'ordre) de $\mathrm{rot}_{I,\,\theta}$ puis de $\mathrm{hom}_{I,\,k}$.
Immédiat d'après la **figure 1.10.** ▮

Exercice 1.4

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ deux vecteurs non égaux.
Etablir qu'il existe une similitude directe (unique) qui transforme M en M' et N en N'.

Corrigé :

Il s'agit de déterminer le centre I de la similitude directe, conséquence du **théorème 1.9**.
Si $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$, ($k \neq 1$ par hypothèse), alors la similitude est réduite à l'homothétie de centre I point de concours des droites (MM') et (NN') et de rapport k.

Sinon nous avons $M'N' = k\,MN$ et $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \theta$, non multiple de $2\,\pi$; si U est le point de concours des droites (MN) et $(M'N')$ alors le point I, tel que $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = \theta$, est situé sur les cercles circonscrits aux triangles $MM'U$ et $NN'U$.
On peut vérifier que les triangles IMN et $IM'N'$ sont directement semblables.
Dans tous les cas I est unique, ce qui induit l'unicité de la similitude directe.

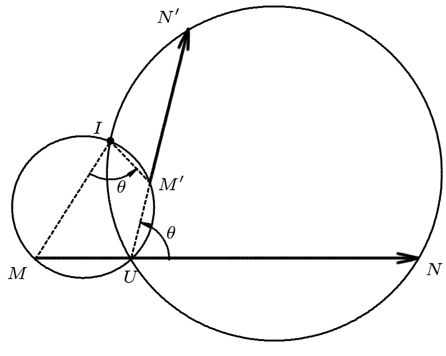

FIG. 1.11 – Centre I de la similitude directe.

Nous avons supposé, sur la figure que U est distinct des points M, M', N et N'.

[#7]Deux triangles directement semblables ont leurs côtés respectifs proportionnels et leurs angles respectifs égaux.

Pour construire la figure ci-dessus, il est nécessaire avec le logiciel de dessin PICTEX que nous utilisons, de déterminer les coordonnées des centres et les rayons des cercles circonscrits aux triangles $MM'U$ et $NN'U$.
Pour cela utilisons **MuPad.**
Si nous choisissons $M = (0\ 0)$, $N = (10, 0)$, $M' = (3,\ 2)$ et $N' = (4,\ 6)$, alors $U = (2.5,\ 0)$ et les instructions donnant les calculs sont :

- **assume(R > 0) :** /* il est clair que le rayon R est positif */
- **f := (x,y) -> (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 :**
  /* équation du cercle circonscrit au triangle $MM'U$ */
- **equ1 := f(0, 0) :** /* le cercle passe par M */
- **equ2 := f(2.5, 0) :** /* le cercle passe par U */
- **equ2 := f(3, 2) :** /* le cercle passe par M' */
- **solve({equ1, equ2, equ3},{a, b, R}) ;**

$$\{[R = 1.858258593, a = 1.25, b = 1.375]\}$$

Idem pour le cercle circonscrit au triangle $NN'U$.

1.2 Trigonométrie

Les formules qui suivent sont à connaître par coeur, ou à savoir retrouver très rapidement. Le temps des formulaires est terminé et celui des calculatrices où il est possible de mémoriser ces formules est aléatoire, car il est dans l'humeur du temps de supprimer dans les examens et concours post baccalauréat les calculatrices ... personnellement je suis contre ..., mais ....

1.2.a Définition des fonctions circulaires

Nous supposons les axes orientés d'origine O, avec $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$.

Définition 1.7

Les fonctions trigonométriques définies par

$$\overline{OS} = \sin x,\ \overline{OC} = \cos x,\ \overline{AT} = \tan x \text{ et } \overline{BT'} = \text{cotan } x$$

sont respectivement le cosinus, le sinus, la tangente ($x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$) et la cotangente ($x \neq k\,\pi$), avec $k \in \mathbb{Z}$, de l'angle x.

Il résulte de la définition que la fonction cos *est paire et que les fonctions* sin, tan *et* cotan *sont impaires. De plus les fonctions* sin *et* cos *sont $2\,\pi-$périodiques et les fonctions* tan *et* cotan *sont $\pi-$périodiques.*
Pour des compléments, cf ***fonctions circulaires réciproques 6.5 : Analyse****.*

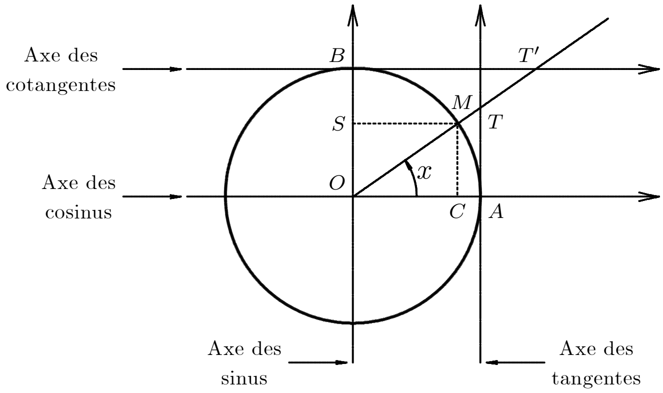

FIG. 1.12 – Définition des fonctions trigonométriques.

M est un point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = x$, avec $x \in \mathbb{R}$.