Jour n^{o}1

Exercice 1.1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P = Q^2 + R^2.$$

Exercice 1.2

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et soit la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$:

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix},$$

où O_n est la matrice nulle carrée d'ordre n et I_n la matrice identité.
Donner les valeurs propres de B et les sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Énoncé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :
$$P = Q^2 + R^2.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice assez particulier sur les polynômes. Il n'est pas évident si on ne l'a pas déjà vu. De plus, l'étude générale des polynômes est au programme de PCSI, donc de première année, et elle est revue trop rapidement en deuxième année et essentiellement au moment de l'introduction du polynôme caractéristique. On commence par remarquer que nécessairement P est de degré pair. On remarquera aussi que si P possède une racine réelle, son ordre de multiplicité est pair. On remarquera enfin que le coefficient dominant de P est nécessairement positif. Puis, on fera une récurrence sur le degré en montrant d'abord le résultat pour un polynôme de degré 2 puis on supposera le résultat vrai pour un polynôme de degré $2n - 2$, où n est un entier supérieur ou égal à 2 et on le prouvera pour un polynôme P de degré $2n$. On pourra séparer le cas où P a une racine réelle de celui où il n'en a pas.

> Rapport du jury 2011
>
> Rappelons une évidence : il faut réviser l'ensemble du programme en ce qui concerne les mathématiques, et pas seulement la deuxième année, le mieux étant naturellement un travail régulier tout au long du cycle préparatoire.

$\hookrightarrow$ On utilisera l'identité (dite de Lagrange) qui est valable pour tous polynômes A, B, C et D : $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$.

Corrigé

Le fait que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique immédiatement que le degré de P est pair et que le coefficient dominant de P est positif. Cela implique aussi que si P a une racine réelle simple ou d'ordre de multiplicité impair alors P change de signe au voisinage de cette racine ce qui n'est pas possible. Enfin, si P est constant alors :
$$P = K \geq 0$$
et on a bien le résultat en posant $Q = \sqrt{K}$ et $R = 0$:
$$P = \sqrt{K}^2 + 0^2 = Q^2 + R^2.$$

Cas d'un polynôme de degré 2

Posons $P = aX^2 + bX + c$. On sait que $a > 0$ car $\deg P = 2$.
On écrit, de façon classique :
$$P = aX^2 + bX + c = a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Or P ne change pas de signe et le discriminant de l'équation du second degré $P = 0$ est nécessairement négatif ou nul. Ce discriminant est $b^2 - 4ac$.
On peut en déduire que :

$$\frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq 0.$$

Il reste à poser :

$$Q = \sqrt{a}\left(X + \frac{b}{2a}\right) \text{ et } R = \sqrt{a}\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

On a bien : $P = Q^2 + R^2$.

Cas d'un polynôme de degré $2n$

Nous allons faire une récurrence. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat établi pour tout polynôme à valeurs positives de degré au plus $2n - 2$. On considère donc un polynôme P de degré $2n$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Si P admet une racine réelle α, son ordre de multiplicité est pair (sinon P changerait de signe) et on peut écrire :

$$P = (X - \alpha)^2 Z,$$

où Z est un polynôme réel de degré $2n-2$ à valeurs positives. On applique l'hypothèse de récurrence à Z. On sait qu'il existe un couple de polynômes réels $(A,\, B)$ tels que :

$$Z = A^2 + B^2.$$

On en déduit :

$$P = (X - \alpha)^2 A^2 + (X - \alpha)^2 B^2.$$

On pose : $Q = (X - \alpha)A$ et $R = (X - \alpha)B$. On a bien le résultat voulu.

2) Si P n'a pas de racine réelle, il admet au moins deux racines complexes conjuguées et distinctes que l'on note z et $\bar{z}$. On peut alors écrire P sous la forme :

$$P = (X - z)(X - \bar{z})Z,$$

où Z est un polynôme réel de degré $2n - 2$ et à valeurs positives. On applique comme précédemment l'hypothèse de récurrence à Z. On sait qu'il existe un couple de polynômes réels $(A,\, B)$ tels que :

$$Z = A^2 + B^2.$$

Le problème est $(X - z)(X - \bar{z})$ qui n'est pas un carré. Par contre, il s'agit d'un polynôme réel de degré 2 de coefficient dominant 1 et qui n'a pas de racine réelle. Il est donc à valeurs positives et on peut lui appliquer ce que l'on a fait dans le cas $\deg P = 2$. On sait qu'il existe un couple de polynômes réels $(C,\, D)$ tels que :

$$(X - z)(X - \bar{z}) = C^2 + D^2.$$

Il reste à appliquer l'identité dite de Lagrange :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

On en déduit :

$$P = (X - z)(X - \bar{z})Z = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 = Q^2 + R^2,$$

en posant $Q = AC + BD$ et $R = AD - BC$. Finalement, on peut conclure.

$$\boxed{\exists\,(Q,\,R) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ P = Q^2 + R^2.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'un polynôme réel qui admet une racine réelle d'ordre 1 (et plus généralement de multiplicité impaire) change obligatoirement de signe.

♡ Il faut se souvenir qu'un polynôme réel de degré impair change obligatoirement de signe.

♡ Il faut se souvenir qu'un polynôme réel de degré 2 est de signe constant si et seulement si son discriminant est négatif ou nul.

♡ Il faut se souvenir que si z est racine d'un polynôme réel alors $\bar{z}$ est aussi une racine de ce polynôme.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on met sous forme irréductible un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$.

i. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on cherche les racines de P (en utilisant le cours du chapitre sur les nombres complexes : on peut aussi, par exemple, par un changement de variable, se ramener à un degré plus simple) et on écrit P directement sous sa forme scindé.

ii. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut commencer par chercher les racines dans $\mathbb{C}$, trier les racines réelles et celles non réelles puis associer ensemble les couples de racines conjuguées $(\alpha,\,\bar{\alpha})$. On effectue tous les produits $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$. On obtient alors un produit de polynômes irréductibles du premier degré et du second degré avec un discriminant < 0.

iii. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si le degré de P n'est pas trop grand, on peut tenter des identifications en devinant en partie les facteurs irréductibles.

iv. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si la forme du polynôme s'y prête, on peut utiliser des identités remarquables.

♡ Il faut se souvenir de l'identité de Lagrange qui permet d'écrire la somme de deux carrés sous la forme d'un produit de sommes de deux carrés. Elle est utile en particulier en arithmétique. Allez la revoir dans le formulaire !

Formulaire

• On a **l'identité de Lagrange** valable pour des complexes ou des polynômes complexes A, B, C et D :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

Énoncé

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et soit la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$:

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix},$$

où O_n est la matrice nulle carrée d'ordre n et I_n la matrice identité.

Donner les valeurs propres de B et les sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice d'algèbre linéaire sur la diagonalisation. On écrit au départ une matrice B donnée par blocs. Attention, ce type d'exercices, où l'énoncé est la donnée d'une matrice écrite par blocs, est de plus en plus fréquent. Il est efficace que vous en traitiez un certain nombre, notamment ceux de cet ouvrage. Pour cet exercice, on commence par demander les valeurs propres de B. On pourra partir de l'écriture d'un vecteur sous la forme d'une matrice par blocs :

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

où X et Y sont deux matrices de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. On exprimera que Z est un vecteur propre de B pour la valeur propre arbitraire $\lambda \in \mathbb{C}$. On remarquera ensuite le lien entre Z vecteur propre de B et Y vecteur propre de A, pour une valeur propre à déterminer. Dans la seconde partie de l'exercice, on demande de trouver une condition de diagonalisation pour B. On pourra traiter deux cas selon que la valeur propre de B est nulle ou non.

$\hookrightarrow$ Il ne faut pas oublier que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ c'est-à-dire que si l'on note E_{μ_i}, pour i variant de 1 à p, les sous-espaces propres de A, on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = n$.

Corrigé

Valeurs propres de B

Notons $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où X et Y sont deux matrices de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. On a alors :

$$BZ = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY \\ X \end{pmatrix}.$$

Si Z est un vecteur propre de B, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$BZ = \lambda Z \Rightarrow [AY = \lambda X \text{ et } X = \lambda Y].$$

On en déduit :

$$AY = \lambda^2 Y.$$

On remarque au passage que $Y \neq 0$ car sinon $Y = X = 0$ et $Z = 0$. Or, un vecteur propre est non nul. On peut déjà conclure que Y est nécessairement un vecteur propre de A associé à une valeur propre qui est le carré de la valeur propre choisie de B.

Réciproquement, soit μ une valeur propre complexe de A et soit λ une des racines carrées de μ. Considérons le vecteur :

$$Z = \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix},$$

où $Y \neq 0$ et $AY = \mu Y$. On a :

$$\begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY \\ \lambda Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu Y \\ \lambda Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, Z est un vecteur propre de B associé à λ. Il reste à résumer.

$$\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } B \text{ si et seulement si } \lambda^2 \text{ est une valeur propre de } A.}$$

Sous-espaces propres correspondants

Nous pouvons commencer par le cas où $\lambda = 0$. Dans ce cas, $\mu = 0$ et si l'on pose de nouveau $Z = \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix}$, un vecteur propre de B pour la valeur propre λ est ici :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix},$$

où Y est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} A$. Le sous-espace propre est $\operatorname{Ker} B$.
On peut noter que : $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} B$.
Dans le cas où λ est non nul alors $\lambda^2 \neq 0$ est une valeur propre de A. À chaque vecteur non nul $Y \in \operatorname{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$, on peut associer deux vecteurs $\begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\lambda Y \\ Y \end{pmatrix}$, le premier est un vecteur propre de B pour la valeur propre λ et le second est un vecteur propre de B pour la valeur propre $-\lambda$.
Les sous-espaces propres respectifs sont :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(B - \lambda I_{2n}) \text{ et } \operatorname{Ker}(B + \lambda I_{2n}).}$$

Condition de diagonalisation de B

Comme A est diagonalisable, soit μ_1, ..., μ_p ses valeurs propres distinctes.

1) *Premier cas* : on suppose qu'aucune de ces valeurs propres n'est nulle. Alors pour tout i de 1 à p, chaque complexe μ_i admet deux racines carrées complexes distinctes λ_i et $-\lambda_i$. On a vu que $\begin{pmatrix} \lambda_i Y \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B si et seulement si Y est un vecteur propre de A. Posons pour tout i de 1 à p,

$$F_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(B - \lambda_i I_{2n}) \text{ et } E_{\mu_i} = \operatorname{Ker}(A - \mu_i I_n).$$

On écrit :

$$Y \in E_{\mu_i} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_i Y \\ Y \end{pmatrix} \in F_{\lambda_i} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_i Y \\ Y \end{pmatrix} \in F_{-\lambda_i}.$$

Ceci permet d'avoir les égalités : $\dim E_{\mu_i} = \dim F_{\lambda_i} = \dim F_{-\lambda_i}$.
On se rappelle que A est diagonalisable.

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = n.$$

On écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(F_{\lambda_i}) + \sum_{i=1}^{p} \dim(F_{-\lambda_i}) = 2\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = 2n.$$

Donc B est diagonalisable.

2) *Deuxième cas* : on suppose qu'une des valeurs propres de A est nulle. Quitte à réindexer, on supposera que $\mu_1 = 0$. On sait que 0 est aussi valeur propre de B.
On a alors, comme $\dim \operatorname{Ker} B = \dim \operatorname{Ker} A$:

$$\dim \operatorname{Ker} B + \sum_{i=2}^{p} \dim(F_{\lambda_i}) + \sum_{i=2}^{p} \dim(F_{-\lambda_i}) = 2\sum_{i=2}^{p} \dim(E_{\mu_i}) + \dim \operatorname{Ker} A.$$

Comme A est diagonalisable : $\displaystyle\sum_{i=2}^{p} \dim(E_{\mu_i}) + \dim \operatorname{Ker} A = n$. Donc :

$$\dim \operatorname{Ker} B + \sum_{i=2}^{p} \dim(F_{\lambda_i}) + \sum_{i=2}^{p} \dim(F_{-\lambda_i}) = 2n - \dim \operatorname{Ker} A < 2n.$$

Ainsi, dans ce cas, B n'est pas diagonalisable.
Il résulte de ce qui précède :

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de } A.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'un complexe non nul a deux racines distinctes.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on fait des produits de matrices écrites en blocs. Ces produits se font finalement comme si chaque bloc était un coefficient de matrice carrée d'ordre 2. Pour plus de précision, allez voir la partie formulaire.

♡ Il faut se souvenir des caractérisations de la diagonalisabilité au programme de la classe de PSI et il faut savoir aller chercher la plus adaptée pour un exercice donné. Résumons ces caractérisations.

1) La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace vectoriel E.
2) Il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
3) E est somme (directe) des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$.
4) Il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u.

Formulaire

• *Représentation matricielle par blocs*

Soit $\beta = (e_1, ...e_n)$ une base de E, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et les sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E, adaptés à cette base β, c'est-à-dire que l'on suppose que la famille $\beta' = (e_1, ..., e_p)$ est une base de F et que la famille $\beta'' = (e_{p+1}, ..., e_n)$ est une base de G. On notera $q = n - p$. La matrice $M = (\mu_{ij})$ d'un endomorphisme u de E dans β peut alors être décomposée en une matrice :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

de blocs correspondant à la partition $\beta = \beta' \cup \beta''$. Le bloc C, par exemple, est une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{K})$. C'est la partie du tableau des coefficients situés à la croisée des lignes d'indice variant de 1 à p et des colonnes d'indice variant de $p+1$ à n. C'est la matrice de l'application $p_F \, o \, u_G$ de G dans F. (p_F est la projection sur F et u_G est la restriction de u à G.)

La combinaison $\mu M + \mu' M'$ de deux matrices par blocs de même taille

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}$$

est évidemment la matrice :

$$\begin{pmatrix} \mu A + \mu' A' & \mu C + \mu' C' \\ \mu B + \mu' B' & \mu D + \mu' D' \end{pmatrix}.$$

Le produit MM' est donné par :

$$\begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}.$$

• *Valeur propre et vecteur propre*

Un vecteur $\vec{x}$, non nul, de E est un vecteur propre de l'endomorphisme u s'il existe un scalaire λ tel que $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Le scalaire λ est appelé valeur propre de u. On dit que $\vec{x}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

• *Une caractérisation de diagonalisation*

E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n) = n,$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont les valeurs propres de A.