MORCEAUX CHOISIS POUR COMMENCER

CONCOURS EPL
Session 1996
Extrait 01

Notions utilisées

Géométrie euclidienne du plan, cercle, équation algébrique dans $\mathbb{C}$. Affixe d'un nombre complexe. Racines dans $\mathbb{C}$.

Nous considérons dans le repère orthonormal Oxy, *les points* $I(-\frac{1}{2}, 0)$ *et* $J(0, 1)$, *et le cercle* $\mathcal{C}$ *de diamètre* (IJ).

Question 01 : On note dans cette question et les suivantes l'équation (1) :

$$x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 - y = 0.$$

- **a)** $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe Oy et coupe l'axe Ox en deux points distincts
- **b)** $\mathcal{C}$ et l'axe Ox ont au moins un point commun
- **c)** La projection Ω du centre de $\mathcal{C}$ sur l'axe Ox admet pour abscisse $\frac{1}{4}$
- **d)** Une équation de $\mathcal{C}$ est (1).

Les deux tangentes à $\mathcal{C}$ *parallèles à l'axe* Oy *coupent* Ox *en deux points,* P *d'abscisse positive et* Q *d'abscisse négative avec* $\alpha = \overline{OP}$ *et* $\beta = \overline{OQ}$.

Question 02 :

- **a)** α est solution de (1) pour $y = \frac{1}{2}$
- **b)** $\alpha > 0$, $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ et $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$
- **c)** $\alpha = \frac{1}{2}IJ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
- **d)** $\alpha = -\beta$

Question 03 : Pour une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$, à coefficients réels, du quatrième degré,

- **a)** les racines sont toutes distinctes ou sont toutes réelles
- **b)** les racines sont obligatoirement distinctes
- **c)** les quatre racines sont conjuguées deux à deux
- **d)** une racine au moins est réelle si le terme constant de l'équation est nul

Question 04 : Dans $\mathbb{C}$, l'équation (2) : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ admet quatre racines (admis).

a) Les quatre racines sont distinctes
b) Certaines racines sont réelles
c) Le produit des racines est -1
d) La somme des racines est -1

Nous notons dans la suite $z_k = e^{i2k\pi/5}$ *avec* $k = 0, ..., 4$.

Question 05 :

a) z_k vérifie l'équation $z^5 + 1 = 0$
b) $z_2 = \alpha$, $z_4 = \beta$ et $z_2 + z_4$ est réel

Nous posons $Z = z + \dfrac{1}{z}$ dans (2) et nous obtenons l'équation

c) $Z^2 + Z - 2 = 0$ **d)** $(Z - 1)(Z + 2) = 0$

Question 06 :

a) $\alpha = \cos \dfrac{2\pi}{5}$ et $\beta = \cos \dfrac{6\pi}{5}$
b) $\alpha = \cos \dfrac{6\pi}{5}$ et $\beta = \cos \dfrac{8\pi}{5}$

Les points A_k d'affixe z_k avec $k = 0, ..., 4$ sont les sommets d'un pentagone régulier.

c) Les points A_1, A_3 et A_4 sont les sommets d'un triangle isocèle
d) Les points A_2 et A_4 sont symétriques par rapport au point I.

CORRIGE

Question 01 : Une équation du cercle de diamètre IJ est donné par
$$x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - y = 0.$$
Son centre est $(-1/4, 1/2)$ et son rayon est $\sqrt{5}/4$. En comparant, on remarque que **l'assertion d) est fausse**.

L'intersection du cercle est de l'axe Ox donne $x = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$. Son intersection avec l'axe Oy donne $y = 0$ ou $y = 1$ et (C) n'est pas tangent à Oy. **L'assertion a) est fausse**.
La projection Ω du centre de (C) sur l'axe Ox a pour coordonnées $(-1/4, 0)$ et **l'assertion c) est fausse**. Enfin, il est clair que **l'assertion b) est vraie**.

Question 02 : Une tangente à C, parallèle à Oy, a pour équation $x = X$, avec X prenant ici deux valeurs α et β. Si on remplace dans notre équation,

$$y^2 - y + X^2 + \frac{1}{2}X = 0.$$

y a une seule valeur possible pour un X donné et donc cette équation du second degré en y a son discriminant nul et

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4X^2 + 2X - 1 = 0.$$

Il y a deux solutions distinctes $\alpha = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$ et $\beta = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

Si $y = 1/2$, l'équation (1) devient $4x^2 - 2x - 1 = 0$ dont les solutions sont différentes de α et de β. Puis, on peut écrire que l'égalité

$$(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$$

donne $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$ et $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$.

Enfin, on a bien $\alpha = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$ mais $\alpha \neq \frac{1}{2}IJ$.

Finalement, **les quatre assertions a), b), c) et d) sont fausses**.

Question 03 : L'équation $X^4 + X^2 = 0$ a pour solutions 0 double et i et $-i$. Les racines ne sont pas toutes distinctes ou toutes réelles.

En conclusion, **les assertions a) et b) sont fausses**.

Par exemple $(X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$ est un polynôme à coefficients réels de degré 4 et aucune des racines n'est la conjuguée d'une autre.

L'assertion c) est fausse.

Enfin, si le terme constant est nul, 0 est racine réelle et on peut déclarer que **l'assertion d) est vraie**.

Question 04 : On commence par remarquer que

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0,\ z \neq 1\right].$$

Ainsi les quatre racines de notre équation sont les valeurs appelées z_k dans la suite mais ici avec k variant de 1 à 4 car il faut exclure $z_0 = 1$. On remarque au passage que les quatre racines sont distinctes et **l'assertion a) est vraie**.

Les racines sont conjuguées deux à deux mais aucune n'est réelle.

L'assertion b) est fausse. Puis, on écrit

$$(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

ce qui permet d'affirmer, en développant, que

$$z_1z_2z_3z_4 = 1 \text{ et } z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1.$$

Ainsi, **l'assertion c) est fausse et l'assertion d) est vraie**.

Question 05 : z_k vérifie l'équation $z^5 - 1 = 0$ et **l'assertion a) est fausse**.

Avant d'examiner l'assertion b), on remarque que (2) est ce que l'on appelle une équation réciproque et si on pose $Z = z + \frac{1}{z}$,

$$z \text{ vérifie } (2) \Leftrightarrow Z^2 + Z - 1 = 0.$$

L'équation du second degré en Z a pour solutions

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ et } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

et chacune de ces solutions fournit une nouvelle équation du second degré ce qui fait $2+2=4$ solutions ce qui fait le compte. Après la résolution de ces deux équations, il faut les comparer aux z_k et on écrit :

$$Re(z_1) > 0 \text{ et } Im(z_1) > 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$Re(z_2) < 0 \text{ et } Im(z_2) > 0 \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$Re(z_3) < 0 \text{ et } Im(z_3) < 0 \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$Re(z_4) > 0 \text{ et } Im(z_4) < 0 \Rightarrow z_4 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Déjà, on calcule $z_2 + z_4$ qui n'est pas réel. **L'assertion b) est fausse**.
Enfin, d'après le développement précédent, on peut conclure sans problème que **les assertions c) et d) sont fausses**.

<u>Question 06</u> : On compare les résultats de la question 02 et de la question 05 et on a bien $Re(z_1) = \alpha$ et $Re(z_3) = \beta$.
Par conséquent, **l'assertion a) est vraie** et **l'assertion b) est fausse**.
Comme $z_2 + z_4$ n'est pas réel, A_2 et A_4 ne peuvent pas être symétriques par rapport à I et **l'assertion d) est fausse**.
Enfin, comme un calcul (long mais faisable) donne

$$|z_1 - z_3|^2 = |z_1 - z_4|^2 = \frac{1}{2}(5+\sqrt{5}),$$

$A_1A_3 = A_1A_4$ et le triangle proposé est isocèle. **L'assertion c) est vraie**.

CONCOURS EPL
Session 1996
Extrait 02

Notions utilisées
Fonctions usuelles. Continuité en un point et dérivabilité sur un intervalle.

Nous considérons la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x\ \ln|x| + (1-x)\ln|1-x| + (2-x)\ln\ |2-x|,$$

de courbe représentative $\mathcal{F}$ dans le repère orthonormal Oxy.

Question 01 :

a) $\lim\limits_{u\to 0} \ln|u| = 1$ car $\ln|u| = o(u^{-1})$ dans un voisinage de 0
b) f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
d) $f(x) \sim -x\ln x$ pour $x \to +\infty$

Question 02 : Dans cette question, nous supposons $0 < x < 1$.

a) $f'(x) = \ln \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} - 1$

b) $f'(x) > 0$ **c)** $f(x) > 0$ **d)** $f(x) < 2\ln 2$

Question 03 : Dans cette question, nous supposons $1 < x < 2$.

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (3 - e^{-1})x + 2 = 0$

b) f' n'admet pas de zéro

c) f est décroissante

d) f n'est pas bornée

Question 04 : Dans cette question nous supposons que $x > 2$.

a) L'expression de $f'(x)$ est identique à celle trouvée pour $0 < x < 1$.

b) $f'(x) > 0$ **c)** $f(x) > -1$ **d)** $f(x) < 2\ln 2$

Question 05 : Dans cette question nous supposons que $x < 0$.

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3 - e^{-1})x + 2 = 0$

b) $f'(x) < 0$ **c)** $f(x) > \ln 2$ **d)** $f(x) < 2\ln 2$

CORRIGE

<u>**Question 01**</u> **:** Pour commencer, on remarque que $\lim\limits_{u \mapsto 0} \ln |u| = -\infty$ et **l'assertion a) est fausse** bien que l'on ait pourtant $\ln |u| = o(u^{-1})$.
Par ailleurs, f est bien prolongeable par continuité en $x = 0$, en $x = 1$ et en $x = 2$, de valeurs $f(0) = 2\ln 2$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 2\ln 2$ en notant encore f ce prolongement.
En conclusion, **l'assertion b) est vraie**.
Par ailleurs, au voisinage de 1 par la gauche, on a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x\ln x + (1 - x)\ln(1 - x) + (2 - x)\ln(2 - x)}{x - 1}$$

ce qui donne en posant $x = 1 - t$, avec t dans un voisinage de 0^+,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(t - 1)\ln(1 - t) - t\ln t - (1 + t)\ln(1 + t)}{t}.$$

On peut raisonner par équivalents (ou avec un développement limité si vous connaissez déjà) et notre quantité a pour terme dominant $-\ln t$ qui tend vers $+\infty$. La dérivée à gauche de f n'existe pas. On en déduit que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ entier et **l'assertion c) est fausse**.
Enfin, au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est bien équivalent à $-x\ln x$ et par conséquent, **l'assertion d) est vraie**.

<u>**Question 02**</u> **:** Sur $]0,\,1[$, l'expression de f est

$$x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x) + (2-x)\ln(2-x)$$

et sa dérivée est bien l'expression proposée dans l'assertion a).
Ainsi, on peut déjà écrire que **l'assertion a) est vraie**. Par contre,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-3x+2} = e \Leftrightarrow x^2 - (3+e^{-1})x + 2 = 0$$

et cette dernière équation a une solution dans $]0,\,1[$ que l'on notera α par commodité. La fonction f est décroissante de 0 à α et croissante de α à 1. Comme $f(1) = 0$, on en déduit que f est majorée par sa valeur $f(0) = 2\ln 2$ mais n'est pas minorée par 0.
Les assertions b) et c) sont fausses et **l'assertion d) est vraie**.

<u>**Question 03**</u> **:** Sur $]1,\,2[$, l'expression de f est

$$x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(x-1) + (2-x)\ln(2-x)$$

et sa dérivée est $f'(x) = \ln \dfrac{-x}{x^2-3x+2} - 1$. On a alors

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{x^2-3x+2} = e \Leftrightarrow x^2 - (3-e^{-1})x + 2 = 0.$$

Déjà, on remarque que **l'assertion a) est vraie**. Puis, comme la dernière équation n'a pas de solution réelle, **l'assertion b) est vraie**.
Une étude rapide indique que $f'(x)$ est positif et f est donc croissante, **l'assertion c) est fausse** et comme f est évidemment bornée, **l'assertion d) est fausse**.

<u>**Question 04**</u> **:** Sur $]2,\,+\infty[$, l'expression de f est

$$x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(x-1) + (2-x)\ln(x-2)$$

et sa dérivée est bien l'expression proposée dans l'assertion a) de la question 02. Ainsi, **l'assertion a) est vraie**. On a alors comme dans la question 02,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-3x+2} = e \Leftrightarrow x^2 - (3+e^{-1})x + 2 = 0.$$

Cette équation a une solution $\beta > 2$. La fonction f est croissante de 2 à β et décroissante de β à $+\infty$. Comme $f(x) \sim -x\ln x$ au voisinage de $x = +\infty$, on n'a pas $f(x) > -1$.
Finalement, **les assertions b), c) et d) sont fausses**.

<u>**Question 05**</u> **:** Sur $]-\infty,\,0[$, l'expression de f est

$$x \mapsto x\ln(-x) + (1-x)\ln(1-x) + (2-x)\ln(2-x)$$

et sa dérivée est $f'(x) = \ln \dfrac{-x}{x^2-3x+2} - 1$. On a alors

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{x^2-3x+2} = e \Leftrightarrow x^2 - (3-e^{-1})x + 2 = 0.$$

L'assertion a) est fausse. Par contre, on peut vérifier que f' est négative, que f est donc décroissante et de minimum $f(0) = 2\ln 2 > \ln 2$.
L'assertion d) est fausse et **les assertions b) et c) sont vraies**.

CONCOURS ICNA
Session 1998
Extrait

Notions utilisées

Courbes paramétrées. Coniques. Plan euclidien.

On considère la courbe C d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{t+2}{t^2-1},\ y(t) = \frac{2t}{t^2-1}$$

dans le plan euclidien rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Question 01 :

a) Les fonctions x et y sont définies sur $I = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
b) On peut prolonger par continuité x en $t = 1$
c) y est dérivable sur I.
d) x est dérivable pour $t = -1$

Question 02 : S'il existe deux valeurs α et β qui annulent $y'(t)$, telles que $\alpha < \beta$, alors

a) $\alpha\beta = -1$ **b)** $\alpha < \beta < 0$ **c)** $\alpha < -1 < 0 < \beta$ **d)** $\alpha + \beta = -4$

Question 03 :

a) x admet un minimum pour $t < -1$
b) x est bornée pour $-1 < t < 1$
c) y est monotone par morceaux sur I
d) $x = y = 0$ pour au moins deux valeurs de t

Question 04 : C admet pour asymptote la droite d'équation :

a) $y = 2x - 2$ **b)** $y = 2(x+1)$ **c)** $y = -2x$ **d)** $y = \frac{2}{3}(x+1)$

Question 05 :

a) C est une conique **b)** C est une ellipse
c) C n'admet pas de centre de symétrie car x n'est pas une fonction impaire et malgré que y le soit
d) Il existe deux points distincts de C en lesquels la tangente à C est parallèle à l'axe des ordonnées Oy.

Question 06 :

a) L'élimination de t entre x et y conduit à l'équation cartésienne, notée (1), de C : $4x^2 - 4xy - 3y^2 + 8x - 4y = 0$
b) Ce qui permet de dire que la courbe C est une conique dont un des foyers est O
c) Les solutions, d'inconnues y de (1), donnent les asymptotes de C. Toutefois les solutions en x de (1) ne donnent les asymptotes que si et seulement si les asymptotes sont verticales

d) Toute équation de la forme
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0,$$
où A, B, C, D et E sont des constantes est une hyperbole si et seulement si $B^2 - AC > 0$

CORRIGE

Question 01 : On voit que x et y sont effectivement définies sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et sont dérivables sur cet ensemble. Par contre, x et y ne sont pas bornés au voisinage de 1 ou de -1. Finalement, **les assertions a) et c) sont vraies** et **les assertions b) et d) sont fausses**.

Question 02 : Comme $y'(t) = \dfrac{-2(t^2+1)}{(t^2-1)^2}$, il n'existe aucune valeur qui annule y' et **les quatre assertions a), b), c) et d) sont fausses**.

Question 03 : Sur I, $x'(t) = -\dfrac{t^2+1+4t}{(t^2-1)^2}$ et donc x' s'annule pour une valeur $t = a$ avec $a < -1$ et pour une valeur $t = b$ avec $-1 < b < 0$. La fonction x est décroissante de $-\infty$ à a et croissante de a à -1. Elle admet donc un minimum pour $t < -1$. **L'assertion a) est vraie**. Comme la fonction x n'est pas bornée au voisinage de $t = -1$, **l'assertion b) est fausse**. Enfin, y est bien monotone par morceaux, **l'assertion c) est vraie** mais $x(t)$ et $y(t)$ ne s'annulent jamais en même temps. **L'assertion d) est fausse**.

Question 04 : On vérifie que $y = -2x - 2$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $t = -1$ et que $y = \dfrac{2}{3}(x+1)$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $t = 1$.
Les assertions a), b) et c) sont fausses et **l'assertion d) est vraie**.

Question 05 : En éliminant t entre x et y, on obtient
$$4x^2 - 4xy - 3y^2 + 8x - 4y = 0.$$
C'est une équation de conique, par définition. **L'assertion a) est vraie**. Ceci dit, nous ne sommes pas rigoureux car le point O qui appartient à la conique n'est qu'un point limite de notre courbe paramétré (pour t tendant vers ∞) et nous associons donc le point O et la courbe C pour en faire la conique.
Comme $x(t)$ n'est pas bornée, notre conique n'a aucune chance d'être une ellipse et **l'assertion b) est fausse**. Enfin, le fait que x ne soit pas impaire ne prouve seulement que O n'est pas le centre de symétrie. Il peut y en avoir un autre et en l'état actuel de notre raisonnement, on peut déjà conclure que **l'assertion c) est fausse**. Comme C posséde deux asymptotes obliques et est une conique, c'est une hyperbole et le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie, c'est le point $(-1, 0)$. Enfin, la tangente en un point