SAVOIRS

Thème 1 - Ensembles

[S1.1] Appartenance

Quand un élément x appartient à un ensemble E, on écrit « $x \in E$ » sinon on écrit « $x \notin E$ » .
Un ensemble E peut se définir :
− à l'aide d'ensembles de référence ($\mathbf{N}$, intervalles de $\mathbf{R}$, ...) ;
− au moyen d'accolades, avec la liste exhaustive ou non de ses éléments ;
− au moyen d'accolades, avec une ou plusieurs propriétés que doivent vérifier ses éléments, le symbole « / » signifiant « tel que » .

Voici quelques exemples :

$E = \mathbf{N} \cap [0; 6]$ est l'ensemble des entiers compris entre 0 et 6 ;
$E = \{2, 3, 7, 8\}$ est un ensemble dont on voit la liste exhaustive des éléments ;
$E = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ est l'ensemble des entiers pairs, présenté sous forme d'une liste non-exhaustive de ses éléments ;
$E = \left\{x \in \mathbf{R}/x^2 \leq 1\right\}$ est décrit à l'aide d'une propriété, il est égal à $[-1; 1]$.

On convient qu'il existe un ensemble, appelé ensemble vide, ne possédant aucun élément. Il est noté $\emptyset$.

[S1.2] Intersection

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. La partie de E constituée des éléments qui sont dans A et dans B est appelée intersection de A et B et notée $A \cap B$.
On a donc $A \cap B = \{x \in E/x \in A \text{ et } x \in B\}$.

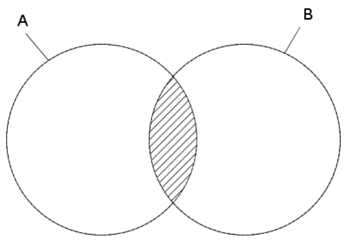

Figure 1 – $A \cap B$

On a les propriétés suivantes :

$A \cap B = B \cap A$ [commutativité],

$A \cap A = A$,

$A \cap E = A$,

$A \cap \emptyset = \emptyset$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ [associativité].

[S1.3] Réunion

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. La partie de E constituée des éléments qui sont dans A ou dans B est appelée réunion de A et B et notée $A \cup B$.
On a donc $A \cup B = \{x \in E / x \in A \textit{ ou } x \in B\}$.

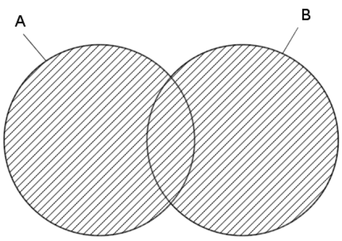

FIGURE 2 – $A \cup B$

On a les propriétés suivantes :

$A \cup B = B \cup A$ [commutativité],

$A \cup A = A$,

$A \cup E = E$,

$A \cup \emptyset = A$,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ [associativité].

[S1.4] Distributivité

Soient A, B, C trois parties quelconques d'un ensemble E. On a alors :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

[S1.5] Inclusion

On dit que l'ensemble F est inclus dans l'ensemble E ou que F est une partie de E si tout élément de F est élément de E. On note alors $F \subset E$.
On dit que E et F sont égaux et on note $E = F$ si $F \subset E$ et si $E \subset F$.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Quelles que soient les parties A, B et C d'un ensemble E, on a :

$(A \subset B \textit{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ [transitivité],

$A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

[S1.6] Complémentaire

Soit A une partie d'un ensemble E.
La partie de E constituée des éléments qui ne sont pas dans A est appelée complémentaire de A et notée $\overline{A}$.
On a donc $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$.

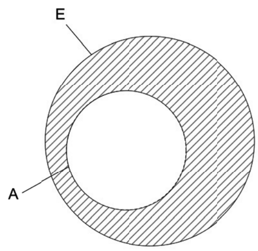

FIGURE 3 – $\overline{A}$

Quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E, on a :

$\overline{\overline{A}} = A$,

$\overline{\emptyset} = E$,

$\overline{E} = \emptyset$,

$A \cap \overline{A} = \emptyset$,

$A \cup \overline{A} = E$,

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ [formules de Morgan],

$A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

[S1.7] Produit cartésien

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble noté $E \times F$ constitué de tous les couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. Ainsi, $E \times F = \{(x, y)/x \in E \ et \ y \in F\}$.

✓ $E \times E$ est noté E^2.

Thème 2 - Applications

Les symboles « $\forall$ », « $\exists$ » et « ! » signifient respectivement « quel que soit », « il existe » et « unique » .

[S2.1] Application

Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F, notée $f : E \longrightarrow F$ est une relation entre E et F telle que chaque élément de E (ensemble de départ) est relié à un unique élément de F (ensemble d'arrivée).
Quand un élément x de E est relié à un élément y de F, on note $y = f(x)$.
On dit alors que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f.

On rencontre également la notation $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x). \end{array}$

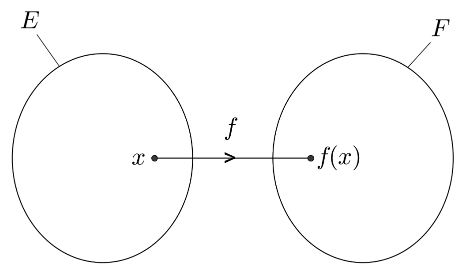

Figure 1 – Application

✓ Quand E et F sont des parties de $\mathbf{R}$, on dit que f est une fonction.

[S2.2] Image directe

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit I une partie de E. On appelle image directe de I par f, la partie de F, notée $f(I)$, définie par $f(I) = \{f(x)/x \in I\}$.

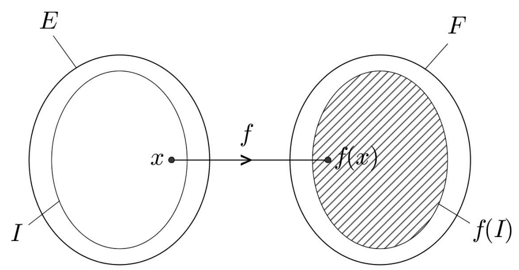

Figure 2 – $f(I)$

✓ $f(I)$ est l'ensemble des images des éléments de I.

[S2.3] Composition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
On appelle application composée, notée gof, l'application de E dans G définie par $\forall x \in E : (gof)(x) = g(f(x))$.

On a donc le diagramme suivant : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)).$$

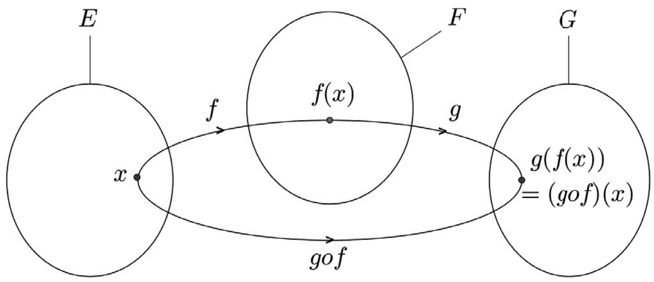

Figure 3 – gof

✓ L'application gof est aussi appelée ≪ f suivie de g ≫.

Notons enfin que ≪ o ≫ est associative, c'est-à-dire qu'elle vérifie $ho(gof) = (hog)of$ pour toutes applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$.

[S2.4] Application identique

Soit E un ensemble. On appelle application identique de E, notée Id_E, l'application de E dans E, définie par $\forall x \in E : Id_E(x) = x$.

On vérifie facilement pour toute application $f : E \longrightarrow F$ les égalités $foId_E = f$ et $Id_F of = f$ qui signifient que l'application identique est l'élément neutre pour l'opération ≪ o ≫.

[S2.5] Injection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est injective (ou que f est une injection) si tout élément y de F a au plus un antécédent x dans E par f.

✓ f est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

[S2.6] Surjection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) si tout élément y de F a au moins un antécédent x dans E par f.

✓ f est surjective si $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$.

✓ f est surjective si $f(E) = F$.

[S2.7] Bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) si tout élément y de F a un unique antécédent x dans E par f, c'est-à-dire si f est à la fois injective et surjective.

✓ f est bijective si $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$, $y = f(x)$.

[S2.8] Application réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
Alors, f est bijective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $gof = Id_E$ et $fog = Id_F$.
L'application g ci-dessus est unique. Elle est appelée application réciproque de f et notée f^{-1}.

Pour toute application bijective $f : E \longrightarrow F$, on a les propriétés suivantes :

$f^{-1} : F \longrightarrow E$,

$\forall x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$ ou encore $f^{-1}of = Id_E$,

$\forall y \in F$, $f(f^{-1}(y)) = y$ ou encore $fof^{-1} = Id_F$,

$\forall x \in E$, $\forall y \in F : y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

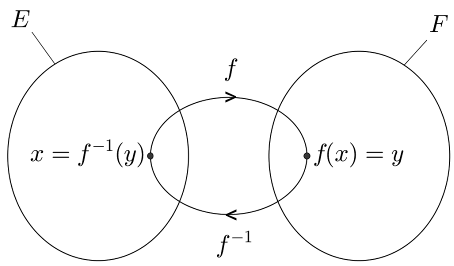

Figure 4 – f^{-1}

✓ Pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est donc l'unique antécédent de y par f.

Notons enfin que pour toutes applications bijectives $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, on a gof bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}o\, g^{-1}$.

Thème 3 - Fonctions usuelles

[S3.1] Règles d'encadrement

• Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.
(On peut ajouter le même nombre dans chaque membre d'une inégalité).
• Si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $ac \geq bc$.
(On peut multiplier chaque membre d'une inégalité par un même nombre).
• Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
(On peut ajouter membre à membre des inégalités).
• Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.
(On peut multiplier membre à membre des inégalités si les membres sont positifs).

✓ On ne peut pas soustraire ou diviser membre à membre des inégalités.

[S3.2] Sens de variation

Pour une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, on dit que :
f est croissante sur I si $\forall (a,b) \in I^2 : a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$,
f est décroissante sur I si $\forall (a,b) \in I^2 : a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$,
f est monotone sur I lorsque f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Pour la croissance ou la décroissance stricte, on remplace $\leq$ par $<$ et $\geq$ par $>$.

✓ Si f et g sont croissantes (respectivement décroissantes) sur I, alors $f + g$ est croissante (respectivement décroissante) sur I.

[S3.3] Parité, imparité

Pour une fonction f dont l'ensemble de définition est D_f, on dit que :
f est paire si $x \in D_f \Longleftrightarrow -x \in D_f$ et si $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$,
f est impaire si $x \in D_f \Longleftrightarrow -x \in D_f$ et si $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$.

✓ Si f est paire, alors (C_f) admet l'axe (Oy) comme axe de symétrie.

✓ Si f est impaire, alors (C_f) admet O comme centre de symétrie.

[S3.4] Fonction affine

On appelle fonction affine, toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui à tout x réel associe le nombre réel $ax + b$, où a et b sont des constantes réelles.

Si $a \neq 0$, la fonction $x \longmapsto ax + b$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ quand $a > 0$ et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ quand $a < 0$.
Sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur a, d'ordonnée à l'origine b.