

Table des matières

I Algèbre Linéaire	1
1 Nombres complexes - Polynômes	3
1.1 Le corps des nombres complexes	3
1.1.a Rappels et compléments	3
1.1.b Le corps des complexes	4
1.1.c Conjugué	6
1.1.d Définition géométrique	10
1.1.e Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe	11
1.2 Polynômes	19
1.2.a Trigonométrie et polynôme	20
1.2.b Zéros d'un polynôme	21
1.2.c Factorisation dans \mathbb{C} ou dans \mathbb{R}	24
1.3 Compléments sur les angles	26
1.4 Pentagone - QCM	29
1.5 Nombres complexes et polynôme	35
2 Calcul Matriciel - Suites	41
2.1 Matrice à coefficients dans \mathbb{K}	41
2.1.a Structure d'espace vectoriel des matrices	41
2.1.b Produit de deux matrices	41
2.1.c Matrices qui commutent	42
2.1.d Puissance $r^{\text{ème}}$ d'une matrice	46
2.2 Transposition	54
2.2.a Définition	54
2.2.b Transposée d'une somme	54
2.2.c Transposée d'un produit	55
2.2.d Matrices symétriques et anti-symétriques	55
2.3 Carré magique	64
3 Systèmes d'équations linéaires	67
3.1 Technique du pivot de Gauss	67
3.2 Résolution des systèmes linéaires	70
3.3 Matrices inversibles	74
3.4 Méthode du simplexe	86

4	Espaces vectoriels	97
4.1	Introduction	97
4.1.a	Définition et exemples	97
4.1.b	Sous espaces vectoriels	99
4.1.c	Sous espaces vectoriels supplémentaires	102
4.2	Familles de vecteurs. Bases	104
4.2.a	Equation fondamentale	104
4.2.b	Bases d'un espace vectoriel	105
4.2.c	Matrice d'une famille. Rang d'une famille	111
4.2.d	Caractérisation des bases	115
4.3	Changement de base	119
4.3.a	Introduction	119
4.3.b	Matrice de changement de base	119
4.3.c	Réduite de Gauss - Jordan	133
4.4	Polynômes de Grégory	139
4.5	Somme directe de sous espaces vectoriels	143
5	Applications linéaires	155
5.1	Définitions	155
5.1.a	Applications linéaires	155
5.1.b	Espace vectoriel des applications linéaires	157
5.1.c	Image et noyau	157
5.1.d	Injectivité, surjectivité, bijectivité	162
5.1.e	Composition d'applications linéaires	164
5.1.f	Projecteur et symétrie	170
5.1.g	Groupe linéaire	173
5.2	Matrice d'une application linéaire	174
5.2.a	Définition	174
5.2.b	Espace vectoriel des matrices	175
5.2.c	Equation de $\text{Im } \varphi$ et de $\text{ker } \varphi$	175
5.2.d	Produit de deux matrices	183
5.3	Endomorphismes	184
5.3.a	Inverse d'une matrice	186
5.3.b	Matrices semblables	187
5.3.c	Application à la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice	191
6	Réduction des matrices	197
6.1	Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme	199
6.1.a	Définitions	199
6.1.b	Propriétés	203
6.2	Valeurs et vecteurs propres d'une matrice	206
6.2.a	Définitions	206
6.2.b	Valeurs propres d'une matrice d'ordre 2 ou 3	207

6.2.c	Valeurs propres d'une matrice d'ordre n	210
6.2.d	Propriétés	215
6.3	Réduction d'une matrice ou d'un endomorphisme	230
6.3.a	Diagonalisation	233
6.3.b	Trigonalisation ou triangulation	245
6.3.c	Propriétés de la trace d'une matrice	253
6.3.d	Utilisation des hyperplans stables	255
6.4	Puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice	263
6.5	Matrices stochastiques	273
6.6	Parties stables par un endomorphisme	288
7	Espaces euclidiens	301
7.1	Définitions	301
7.1.a	Produit scalaire	301
7.1.b	Base orthonormale	304
7.1.c	Orthogonalisation de Gram - Schmidt	304
7.2	Plan euclidien orienté	313
7.2.a	Déterminant d'ordre 2	313
7.2.b	Base orthonormale	313
7.3	Espace usuel euclidien orienté	320
7.3.a	Produits scalaire et vectoriel	320
7.3.b	Base orthonormale directe	321
7.3.c	Matrices symétriques réelles et diagonalisation	334
7.3.d	Matrices orthogonales	337
7.3.e	Changement de repère affine	342
7.4	Le lorant	358
II	Analyse	365
8	Fonctions d'une variable réelle	367
8.1	Polynômes	367
8.1.a	Arithmétique des polynômes	367
8.1.b	Zéros d'un polynôme	368
8.1.c	Espace vectoriel des polynômes	371
8.2	Suites	373
8.2.a	Suite itérée	373
8.2.b	Suites adjacentes	378
8.2.c	Suites linéaires	381
8.2.d	Compléments	390
8.3	Fonctions	392
8.3.a	Limites	392
8.3.b	Coniques	393
8.3.c	Continuité	397

8.3.d	Formule des accroissements finis	400
8.3.e	Fonctions trigonométriques et inverses	401
8.4	Développements limités	404
8.5	Logarithmes et exponentielles	406
8.6	Méthodes numériques	416
8.7	DI de tangente hyperbolique	423
9	Calcul intégral	429
9.1	Intégrale impropre	429
9.1.a	Fonction définie presque partout	429
9.1.b	Convergence ou divergence d'une intégrale impropre	430
9.1.c	Quelques critères de convergence	442
9.1.d	Convergence absolue	445
9.1.e	Compléments d'oral	447
9.2	Valeurs approchées d'une intégrale	454
10	Equations différentielles	461
10.1	Compléments	461
10.1.a	Equations différentielles linéaires.	461
10.1.b	Equations différentielles non linéaires	471
10.1.c	Boucle respiratoire	473
10.2	Noyau et équation différentielle	479
10.3	Système différentiel linéaire	483
11	Séries numériques	493
11.1	Définitions et propriétés générales	493
11.1.a	Série numérique	493
11.1.b	Série géométrique	495
11.1.c	Propriétés des séries numériques	496
11.2	Séries à termes positifs	497
11.3	Séries à termes réels	504
11.4	Développement limité et série	516
11.4.a	Introduction	516
11.4.b	Exemples fondamentaux	516
12	Fonctions de plusieurs variables	519
12.1	Domaines de \mathbb{R}^n	519
12.1.a	Distance dans \mathbb{R}^n	519
12.1.b	Boules et pavés de \mathbb{R}^n	520
12.1.c	Domaine simple de \mathbb{R}^n	521
12.1.d	Changement de variable dans un domaine	524
12.2	Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	525
12.3	Continuité	526
12.4	Dérivées partielles	528

12.4.a	Définitions	529
12.4.b	Interversion	531
12.4.c	Fonctions composées	533
12.4.d	Fonctions homogènes	537
12.5	Différentiation	539
12.5.a	Accroissement total	539
12.5.b	Formule de Taylor	539
12.5.c	Différentielles	540
12.5.d	Forme différentielle de degré 1	541
12.5.e	Changement de variable dans une différentielle	544
12.6	Analyse vectorielle	546
12.6.a	Champ scalaire et champ vectoriel	546
12.6.b	Gradient	549
12.6.c	Rotationnel	549
12.6.d	Divergence	550
12.6.e	Circulation d'un champ vectoriel	551
13	Calcul d'aires et de volumes	553
13.1	Intégrales doubles	553
13.1.a	Définition d'une intégrale double	553
13.1.b	Propriétés	557
13.2	Calcul d'aires et de volumes	558
13.2.a	Aire d'une surface plane	558
13.2.b	Changement de variable dans une intégrale double	561
13.2.c	Formule de Green - Riemann	564
13.2.d	Intégrale double impropre	566
13.3	Intégrales triples	568
III	Probabilités	571
14	Variables aléatoires discrètes finies	573
14.1	Fonction de transfert	573
14.2	Ensemble - Analyse combinatoire	573
14.3	Introduction aux probabilités	575
14.4	Loi binomiale	592
14.5	Couple de variables aléatoires	594
14.6	Loi hypergéométrique	601
14.7	Fonction génératrice	602
14.7.a	Définition	602
14.7.b	Propriétés	603
14.7.c	Fonction génératrice des lois usuelles	605
14.7.d	Cas particulier	607
14.8	Problème de révision	610

15 Variables aléatoires discrètes dénombrables	623
15.1 Introduction	623
15.2 Loi géométrique	625
15.2.a Définitions	625
15.2.b Moments	626
15.2.c Fonction génératrice	627
15.3 Loi de Pascal et loi binomiale négative	633
15.3.a Loi de Pascal	633
15.3.b Loi binomiale négative	637
15.4 Loi de Poisson	646
15.4.a Processus de Poisson.	646
15.4.b Définition et représentation	646
15.4.c Moments.	648
15.4.d Valeurs modales	648
15.4.e Somme de deux lois de Poisson	648
15.4.f Fonction génératrice de Poisson	653
15.5 Résumé des v.a.d	654
16 Densités de probabilités	655
16.1 Généralités	655
16.1.a Variable aléatoire absolument continues	655
16.1.b Représentation	659
16.1.c Moments	660
16.2 Loi uniforme	662
16.2.a Définition	662
16.2.b Représentation de la loi uniforme	663
16.2.c Moments	663
16.3 Loi exponentielle	664
16.3.a Définition	666
16.3.b Représentation de la loi exponentielle	666
16.3.c Moments	667
16.4 Loi normale	668
16.4.a Calcul de l'intégrale de Laplace - Gauss	669
16.4.b Définitions et propriétés	674
16.4.c Représentation de la loi normale	675
16.4.d Loi normale centrée réduite	675
16.4.e Calculs pratiques	677
16.5 Changement de variable aléatoire	679
16.6 Compléments	687
16.6.a Loi log - normale	687
16.6.b Loi du t de Student - Fisher	689
16.6.c Informatique	692
16.7 Résumé des v.a.c	694

17 Couples de variables aléatoires continues	695
17.1 Introduction	695
17.2 Densité de probabilité dans \mathbb{R}^n	695
17.2.a Fonction de répartition	695
17.2.b Fonction densité	695
17.3 Couple de variables aléatoires à densité	697
17.3.a Densité d'un couple	697
17.3.b Moments	697
17.3.c Lois de probabilités marginales	698
17.3.d Variables aléatoires indépendantes	700
17.3.e Fonction de répartition	705
17.3.f Produit de convolution	710
17.3.g Somme de variables aléatoires normales	713
18 Théorèmes limites	721
18.1 Convergence en probabilité	721
18.1.a Inégalités de Markov et de Bienaymé - Tchebichev	721
18.1.b Loi faible des grands nombres	722
18.2 Convergence en loi	732
18.2.a Définitions	732
18.2.b Propriété caractéristique	733
18.3 Théorème de la limite centrale	733
18.3.a Correction de continuité	733
18.3.b Théorèmes limites	734
18.4 Exemples de convergence en loi	736
18.4.a Convergence en loi de $\mathcal{H}(N, n, p)$ vers $\mathcal{B}(n, p)$	736
18.4.b Convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$	737
18.4.c Convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p)$ vers $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	738
18.4.d Convergence en loi de $\mathcal{P}(\lambda)$ vers $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	739
18.4.e Exercice complémentaires	741
18.5 Résumé des convergence	750
19 Statistique descriptive à deux variables	751
19.1 Etude et propriétés	751
19.1.a Définition	751
19.1.b Représentation graphique	753
19.1.c Paramètres d'une v.s.d	753
19.1.d Droites de régression	754
19.2 Informatique	756
20 Estimation	761
20.1 Distributions d'échantillonnages	761
20.1.a Distribution d'échantillonnage des moyennes	761

20.1.b	Distribution d'échantillonnage des fréquences	763
20.1.c	Distribution d'échantillonnage des variances	764
20.2	Estimation ponctuelle	765
20.2.a	Estimation sans biais	765
20.2.b	Théorèmes fondamentaux de l'estimation ponctuelle	765
20.3	Estimation par intervalle de confiance	767
20.3.a	Estimation de la moyenne	767
20.3.b	Estimation d'une fréquence par intervalle de confiance	770
20.4	Comparaison de deux échantillons	771
20.4.a	Principe pour deux moyennes	771
20.4.b	Cas où les échantillons sont indépendants	772
20.4.c	Cas où les échantillons sont dépendants	774
20.4.d	Table de la loi du t de Student - Fisher	776