Chapitre 1

Nombres complexes - Polynômes

La notion essentielle en mathématiques est celle d'isomorphisme de deux ensembles structurés[#1].

Il est conseillé de reprendre la structure de corps commutatif, cf. ***tome1 : pages 18 à 20.***

Définition 1.1

> *Nous supposons donnés* $(\mathbb{A},\,+,\,*)$ *et* $(\mathbb{A}',\,+',\,*')$ *deux ensembles structurés.*
> *Toute application bijective* φ *de* $\mathbb{A}$ *sur* $\mathbb{A}'$ *qui respecte les lois est un isomorphisme*[#2]*de* $(\mathbb{A},\,+,\,*)$ *sur* $(\mathbb{A}',\,+',\,*')$.

Dans le cas de deux lois de compositions internes, nous devons avoir

$$\varphi\,(x+y)=\varphi\,(x)+'\varphi\,(y)\ \text{ et } \varphi\,(x*y)=\varphi\,(x)*'\varphi\,(y)\,,\ \text{avec}\ (x,\,y)\in\mathbb{A}^2,$$

et dans le cas d'une composition interne (+ et +' par exemple) et d'une loi de composition externe (et *' par exemple) sur* $\mathbb{K}$*, nous devons avoir*

$$\varphi\,(x+y)=\varphi\,(x)+'\varphi\,(y)\ \text{ et } \varphi\,(\lambda*x)=\lambda*'\varphi\,(x)\,,\ \text{avec}\ (x,\,y)\in\mathbb{A}^2 \text{ et } \lambda\in\mathbb{K}. \quad (1.1)$$

Cette définition exprime que si $(\mathbb{K},\,+,\,*)$ *est un corps alors* $(\mathbb{K}',\,+',\,*')$ *est aussi un corps, et que si est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel alors* $(\mathbb{E}',\,+',\,*')$ *est aussi un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Nous rappelons que (1.1) *est la définition d'une application linéaire, et que dans toute la suite* $+$ *est identique à* $+'$*ainsi que* $*$ *à* $*'$*,cette dernière sera notée usuellement par un espace.*

1.1 Le corps des nombres complexes

1.1.a Rappels et compléments

Cf. ***tome1 : ensemble des nombres complexes : pages 21 à 30.***

Historiquement les nombres complexes ont permis de donner une solution à l'équation $x^2=-1$.

Exercice 1.1 ***: une approche matricielle***

Déterminer les matrices carrées à coefficients réels, d'ordre 2, vérifiant l'équation $M^2=-I$*, où* I *est la matrice unité d'ordre 2.*

[#1] Ensembles sur lesquels sont définies des lois de composition internes, ou externes, par exemple : corps commutatif et espace vectoriel.

[#2] Ce qui veut dire : même morphologie, donc permet l'**identification** entre deux ensembles structurés.

Corrigé :

Nous avons l'équation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\,c + a^2 & (a+d)\,b \\ (a+d)\,c & b\,c + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui donne les conditions

$$\begin{cases} b\,c + a^2 = -1 \\ b\,c + d^2 = -1 \\ (a+d)\,b = 0 \\ (a+d)\,c = 0, \end{cases}$$

$b\,c \neq 0$ sinon $a^2 = d^2 = -1$, ce qui ne donne pas de solution réelle.

Nous en déduisons toutes les solutions

$$\begin{cases} b\,c + a^2 = -1 \\ a + d = 0. \end{cases}$$

Par exemple $a = d = 0$, $b = -1$ et $c = 1$ ou encore $a = c = 1$ et $b = d = -1$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représente à un isomorphisme près le nombre complexe i.

1.1.b Le corps des complexes

Nous donnons une approche matricielle des nombres complexes qui fera apparaître i comme un opérateur de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, *cf.* ***exercice 1.1.***

L'ensemble des nombres complexes est le sous ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels, défini par

$$\mathbb{C} = \left\{ z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ \textit{tel que}\ (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \tag{1.2}$$

Nous allons montrer que $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension 2 et un corps commutatif.*

Pour cela, il sera utile de revoir la structure d'espace vectoriel des matrices, cf. ***tome 1 - théorème 4.2 : page 95*** *et le produit de deux matrices, cf.* ***tome 1 - définition 4.4 : page 96.***

Théorème 1.1

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve :

L'addition interne est définie par l'addition des matrices

$$z + z' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & -b - b' \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

et la multiplication externe par la multiplication d'une matrice par un scalaire

$$\lambda\, z = \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a & -\lambda\, b \\ \lambda\, b & \lambda\, a \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Nous en déduisons alors la structure d'espace vectoriel.

Pour déterminer une base, il suffit d'écrire

$$z = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour établir que $\mathbb{C}$ est un ensemble non vide, formé de toutes les combinaisons linéaires des matrices

$$1_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } i_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimension est bien 2 car les matrices $1_{\mathbb{C}}$ et $i_{\mathbb{C}}$ sont manifestement non liées.
Vous comprenez pourquoi l'écriture $z = a + i\,b$, que nous continuons à justifier. ∎

Théorème 1.2

> $\mathbb{C}$ est un corps commutatif.

Preuve :
D'après le théorème précédent, il suffit de vérifier que la multiplication satisfait la **définition 1.1**.
Le produit des nombres complexes

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } z' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

est

$$z\,z' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a' - b\,b' & -a\,b' - a'\,b \\ a\,b' + a'\,b & a\,a' - bb' \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

soit en posant $A = a\,a' - b\,b'$ et $B = a\,b' + a'\,b$

$$z\,z' = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que la multiplication est une loi interne. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier les autres propriétés. ∎

Il nous est maintenant possible de justifier l'écriture classique d'un nombre complexe.
Nous identifions la matrice unité $1_{\mathbb{C}}$ au réel 1, cela peut être fait en montrant que l'application

$$\varphi : \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \lambda$$

définit un isomorphisme (Vous constaterez que dans la grande majorité des logiciels de calcul formel la matrice unité d'ordre n est notée 1).
Le produit

$$i_{\mathbb{C}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

permet d'écrire $i_{\mathbb{C}}^2 = -1$.
Ainsi nous écrirons les nombres complexes sous la forme $z = a + i\,b$, avec $i^2 = -1$.

Théorème 1.3

> Tout élément de $\mathbb{C}$ appelé nombre complexe peut être écrit sous la forme $z = a + i\,b$, avec $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$.
> a est la partie réelle, notée $\Re\mathrm{e}\, z$, et b est la partie imaginaire, notée $\Im\mathrm{m}\, z$.

Preuve :
Il suffit d'écrire

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis d'identifier par isomorphisme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à 1, et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ à i. ∎

1.1.c Conjugué

Cf. ***tome 1 - définition 1.13 et théorème 1.18 : page 21.***

Exercice 1.2

Nous considérons un circuit R, L, C série, connecté à l'instant $t = 0$ à une source de tension sinusoïdale $U(t) = U_m \cos \omega t$.
Nous déterminons la loi de variation de l'intensité $I(t)$.
Nous rappelons que $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$.

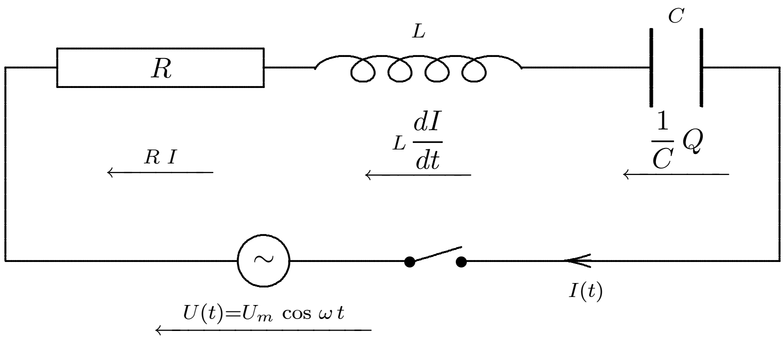

FIG. 1.1 – Représentation du circuit RLC.

Le courant $I(t)$ et la charge $Q(t)$ vérifient l'équation différentielle

$$L\frac{dI}{dt} + R\,I + \frac{1}{C}\,Q = U_m \cos \omega t. \tag{1.6}$$

Pour $\lambda = \dfrac{R}{2\,L}$ (coefficient d'amortissement), $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}}$ (pulsation propre) et $A = \dfrac{U_m}{L}$, cette équation différentielle s'écrit

$$\frac{dI}{dt} + 2\,\lambda\,I + \omega_0^2\,Q = A \cos \omega t. \tag{1.7}$$

1. *Montrer que Q vérifie une équation différentielle du second ordre.*

2. *Dans ce qui suit : $\lambda = 1$, $\omega_0 = \sqrt{2}$, $A = 1$, $\omega = 1$ et nous supposons les conditions initiales $Q(0) = 0$ et $I(0) = Q'(0) = 0$.*

a) *Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène associée.*

b) *Déterminer une solution particulière Q_0 de cette équation différentielle. Exprimer $Q_0(t)$ sous la forme $R \cos(t + \varphi)$ où φ est un angle dont on donnera le cosinus et le sinus.*

c) *Donner la solution, notée $f(t)$, vérifiant les conditions initiales.*

d) *Tracer sommairement la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0,\ 2\,\pi]$. Que passe-t-il pour $t \to +\infty$?*

3. *Résolution de l'équation différentielle (1.6) en utilisant les nombres complexes. Nous associons à $I(t)$ le nombre complexe $I_m\,e^{i\,(\omega\,t+\varphi_i)}$, avec φ_i déphasage à l'origine, que nous notons $\underline{I_m}$.*

a) *Montrer que $i\,\omega\,\underline{I_m}$ et $\dfrac{\underline{I_m}}{i\,\omega}$ sont respectivement associés à $\dfrac{dI}{dt}$ et $Q(t) = \displaystyle\int I(t)\,dt$.*

b) *Si nous associons à la tension* $U(t)$ *le nombre complexe* $U_m\, e^{i(\omega t+\varphi_u)}$*, que nous notons* $\underline{U_m}$*, alors montrer que l'équation différentielle* (1.6) *devient*

$$\underline{U_m} = \left(i\, L\,\omega + R + \frac{1}{i\, C\,\omega}\right)\, \underline{I_m}.$$

Nous rappelons que ce résultat n'est autre que la loi d'Ohm[#3].

c) *Expliquer pourquoi ce résultat permet de retrouver celui obtenu au* ***2***.

Corrigé :

Cet exercice est un problème classique de physique.

Résolution.

1. Nous avons $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{d^2Q}{dt^2}$, d'où l'équation différentielle (1.7) devient une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\,\lambda\,\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2\, Q = A\, \cos\,\omega\, t.$$

Nous savons intégrer cette équation différentielle, cf. **tome 1 - théorème 11.7 : page 457.**

2. Avec les valeurs numériques proposées, nous avons

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\,\frac{dQ}{dt} + 2\,Q = \cos\, t. \tag{1.8}$$

a) L'équation homogène associée admet pour équation caractéristique

$$r^2 + 2\,r + 2 = 0,$$

dont les racines sont

$$\alpha = -1 + i \text{ et } \beta = -1 - i.$$

D'où les solutions de l'équation homogène

$$Q(t) = (K\, \cos\, t + L\, \sin\, t)\; e^{-t},$$

où K et L sont des constantes que nous déterminerons dans la suite.

b) Nous pouvons rechercher une solution particulière de la forme

$$Q_0(t) = a\, \cos\, t + b\, \sin\, t.$$

En dérivant deux fois et en portant dans l'équation avec second membre, nous obtenons

$$(-2\,a + b)\, \sin\, t + (a + 2\,b)\, \cos\, t = \cos\, t,$$

d'où en identifiant

$$\begin{aligned} -2\,a + b &= 0 \\ a + 2\,b &= 1, \end{aligned}$$

soit $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = \dfrac{2}{5}$ et ainsi

$$Q_0(t) = \frac{1}{5}\, \cos\, t + \frac{2}{5}\, \sin\, t.$$

Nous utilisons les nombres complexes pour écrire $Q_0(t)$ sous la forme $R\, \cos\,(t+\varphi)$, cf. **tome 1 - théorème 1.20 : page 25.**

[#3] Georg Simon Ohm, 1789 - 1854, physicien allemand ayant laissé pour la postérité l'unité de résistance.

Nous écrivons
$$\underline{Q_0\,(t)} = \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,i\right)\,e^{i\,t},$$
où $\underline{Q_0\,(t)}$ est le nombre complexe associé à $Q_0\,(t)$ tel que $\Re e\ \underline{Q_0\,(t)} = Q_0\,(t)$.
Nous pouvons écrire
$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,i = \rho\,e^{i\,\varphi},$$
avec $\rho = \sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{2^2}{5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$[#4], ce qui donne
$$\underline{Q_0\,(t)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,e^{i\,(t+\varphi)} \text{ et } Q_0\,(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\,(t+\varphi)$$

c) Nous en déduisons les solutions de l'équation différentielle (1.8)
$$Q\,(t) = (K\,\cos\,t + L\,\sin\,t)\;e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\,(t+\varphi)$$
Les conditions initiales $Q(0) = 0$ et $I\,(0) = Q'\,(0) = 0$ permettent de déterminer K et L.
$$\begin{aligned} Q\,(0) &= K + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\varphi = 0 \\ Q'\,(0) &= -K + L - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin\varphi = 0, \end{aligned}$$
soit $K = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\varphi$ et $L = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\varphi$
$$\begin{aligned} Q\,(t) &= \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\varphi\,\cos\,t + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\varphi\right)\sin\,t\right]e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\cos\,(t+\varphi) \\ &= -\frac{1}{5}\,e^{-t}\sin\,t + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 - e^{-t}\right)\,\cos\,(t+\varphi) \end{aligned}$$

d) Nous représentons sur la figure ci dessous, les fonctions Q et Q_0.
Nous remarquons que la différence entre les deux courbes est rapidement négligeable, cela vient du terme exponentiel e^{-t}. Il en est toujours ainsi car l'équation caractéristique montre que la somme des racines est négative et le produit positif, ce qui exprime que les parties réelles des racines sont strictement négatives.

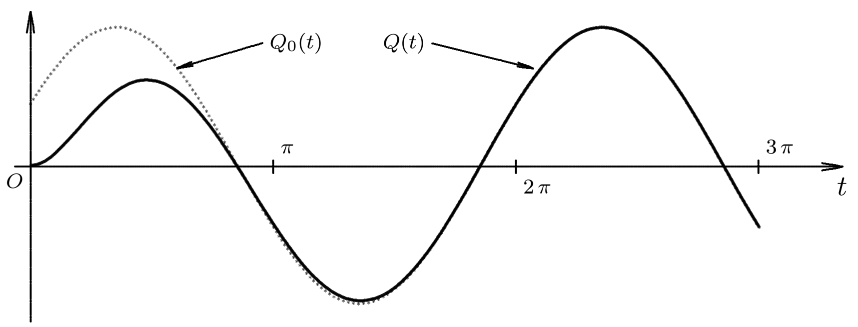

FIG. 1.2 – Représentation de $Q(t)$ et $Q_0\,(t)$.

[#4] Une valeur approchée de φ est
$$\varphi \simeq -1,107\,rds = 63^\circ,435.$$

3. La technique développée permet de transformer une l'équation différentielle (1.8) en un produit : $\underline{U_m} = \underline{Z}\,\underline{I_m}$, le nombre complexe $\underline{Z}$ est l'impédance complexe du circuit.

Cette méthode utilise la transformation de Fourier.

a) La dérivation et l'intégration des fonctions de la variable réelle à valeur dans $\mathbb{C}$ est identique à celle des fonctions réelles de la variable réelle, il suffit de considérer i comme un paramètre et de remplacer (éventuellement i^2 par -1).

$$\begin{array}{llllll}
I\,(t) & \to & I_m\, e^{i\,(\omega\, t+\varphi_0)} & \text{hypothèse} & \text{noté} & \underline{I_m} \\
\dfrac{dI}{dt} & \to & i\,\omega\, I_m\, e^{i\,(\omega\, t+\varphi_0)} & \text{dérivation} & \text{noté} & i\,\omega\,\underline{I_m} \\
\displaystyle\int i\,(t)\ dt & \to & \dfrac{I_m\, e^{i\,(\omega\, t+\varphi_0)}}{i\,\omega} & \text{intégration} & \text{noté} & \dfrac{\underline{I_m}}{i\,\omega}
\end{array}$$

b) Avec ce qui précède, l'équation différentielle (1.6) devient

$$\underline{U_m} = \left(i\,L\,\omega + R + \frac{1}{i\,C\,\omega}\right)\underline{I_m} \tag{1.9}$$

L'impédance complexe [#5] est donc

$$\underline{Z} = R + i\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right).$$

Dans la loi d'Ohm, l'impédance représente une résistance, cf. au célèbre $U = R\,I$.

c) Nous déduisons de (1.9)

$$\underline{I_m} = \frac{\underline{U_m}}{\underline{Z}} = \underline{U_m}\,\frac{R - i\left(L\,\omega - \dfrac{1}{C\,\omega}\right)}{R^2 + \left(L\,\omega - \dfrac{1}{C\,\omega}\right)^2}.$$

Le module de l'impédance complexe $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \dfrac{1}{C\,\omega}\right)^2}$ est ce que l'on mesure réellement.

Les valeurs numériques utilisées au **2.** donnent : $R = 2\,L$, $\dfrac{1}{C} = 2\,L$, $U_m = L$ et $\omega = 1$, nous en déduisons

$$\underline{I_m} = \frac{\underline{U_m}}{L}\,\frac{2+i}{5}.$$

La tension donnée au (1.6) est $\underline{U_m} = L\,e^{i\,t}$, remarquer que $\varphi_u = 0$, d'où

$$\begin{aligned}
\underline{I_m} &= e^{i\,t}\,\frac{2+i}{5} = (\cos\,t + i\,\sin\,t)\,\frac{2+i}{5} \\
&= \frac{2}{5}\,\cos\,t - \frac{1}{5}\,\sin\,t + i\left(\frac{1}{5}\,\cos\,t + \frac{2}{5}\,\sin\,t\right).
\end{aligned}$$

La valeur de $i\,(t)$ est la partie réelle car $\varphi_i = 0$

$$I\,(t) = \frac{2}{5}\,\cos\,t - \frac{1}{5}\,\sin\,t,$$

ce qui correspond à la valeur de $Q_0\,(t) = \displaystyle\int I\,(t)\ dt = \frac{1}{5}\,\cos\,t + \frac{2}{5}\,\sin\,t$, trouvée au **2**, en négligeant le terme de l'amortissement qui n'intervient plus au bout d'un certain temps, comme cela a été vu graphiquement.

[#5] Le mot impédance fut inventé par Oliver Heaviside en juillet 1886.

1.1.d Définition géométrique

Cf. ***tome 1 - définition géométrique et théorème 1.19 : page 22.***

Nous associons au nombre complexe $z = x + i\,y$, le point M du plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $z = x + i\,y \to M = (x,\ y)$ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le plan vectoriel $\mathbb{P}$ associé à $\mathcal{P}$.

Ainsi tout nombre complexe d'après (1.2) *est le représentant de la matrice*

$$z = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

qui représente, par isomorphisme, le produit (commutatif) d'une similitude de rapport ρ et d'une rotation d'angle θ, cf. ***tome 1 - théorème 1.21 : page 28.***

Théorème 1.4 ***: formule de De Moivre***[#6]

> Si $z = \rho\, e^{i\theta}$ alors $z^n = \rho^n\, e^{i\,n\,\theta}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
> En particulier
> $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\,\theta + i\sin n\,\theta.$$

Preuve :

Elle a été admise en première année, cf. **tome 1 - théorème 1.19 : page 22.**

Elle est obtenue par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.

Vraie pour $n = 0$ car $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$ et $\cos 0 + i\sin 0 = 1$.

Si nous l'admettons pour n alors

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n\,(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos n\,\theta + i\sin n\,\theta)\,(\cos\theta + i\sin\theta) && \text{hypothèse} \\
&= \cos n\,\theta\cos\theta + i^2\sin n\,\theta\sin\theta \\
&\qquad + i\,(\cos n\,\theta\sin\theta + \sin n\,\theta\cos\theta) \\
&= \cos\,(n+1)\,\theta + i\sin\,(n+1)\,\theta && \text{formule de trigo}
\end{aligned}$$

prouve qu'elle est héréditaire.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, il suffit d'utiliser $\overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$. ∎

Exercice 1.3

Calculer

$$\int \cos^6 x\,dx.$$

Indication :

Pour le cas général, cf. **tome1 - exercice 1.12 : page 24 et intégrale de Wallis : page 433.** ★

Corrigé :

Nous utilisons la **formule d'Euler**

$$\cos x = \frac{1}{2}\,\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)$$

que nous élevons à la puissance 6 en utilisant la **formule du binôme**

$$\begin{aligned}
\cos^6 x &= \frac{1}{2^6}\,\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)^6 \\
&= \frac{1}{2^6}\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} e^{-i\,k\,x} e^{i\,(6-k)\,x} = \frac{1}{2^6}\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} e^{i\,(6-2\,k)\,x}.
\end{aligned}$$

[#6] Abraham de Moivre, mathématicien français, 1667 - 1754.