CONCOURS EPL
Epreuve de Mathématiques
SESSION 2007

Questions liées : *Questions 01 à 04, questions 05 à 09, questions 10 à 21, questions 22 à 32, questions 33 à 36*

ENONCE

PARTIE I

On désigne par j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. On considère le système (E) :

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ x+jy+j^2z &= b \\ x+j^2y+jz &= c \end{cases}$$

où a, b et c désignent trois nombres complexes donnés.

Question 01 : Le nombre complexe j vérifie :

a) $j^2=1$ **b)** $j^3-1=0$ **c)** $1+j+j^2=0$ **d)** $1-j-j^2=0$

Question 02 : Les nombres complexes x, y, z vérifiant le système (E) sont tels que :

a) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$

b) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+b+c$

c) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj+cj^2$

d) $3x+(y+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$

Question 03 : Le système (E) :

a) n'admet pas de solution **b)** admet au moins deux solutions

c) admet une solution unique :

$$x=\frac{1}{3}(a+b+c),\ y=\frac{1}{3}(a+bj^2+cj),\ z=\frac{1}{3}(a+bj+cj^2)$$

d) admet une solution unique :

$$x=\frac{1}{3}(a+b+c),\ y=\frac{1}{3}(a+bj+cj^2),\ z=\frac{1}{3}(a+bj^2+cj)$$

Question 04 : Une condition nécessaire et suffisante pour que x,y et z vérifiant le système (E) soient des nombres réels est :

a) a,b,c réels

b) a, b, c complexes non réels

c) a réel et $b = c = 0$

d) a réel et b et c complexes conjugués car j^2 et $-j$ sont complexes conjugués

PARTIE II

n étant un entier naturel et a un nombre réel non nul, on pose :

$$u_n = \int_0^{\pi} e^{ax} \cos nx \, dx \;\; \textit{et} \;\; v_n = \int_0^{\pi} e^{ax} \sin nx \, dx$$

Question 05 : u_n vérifie, pour tout n entier naturel :

a) $u_n = \dfrac{1}{an} \left[e^{ax} \sin nx \right]_0^{\pi}$ pour n entier strictement positif et $u_0 = \dfrac{e^{a\pi} - 1}{a}$

b) $u_n = \dfrac{1}{a} \left[e^{ax} \left(\cos nx - \dfrac{n}{a} \sin ax \right) \right]_0^{\pi} + \dfrac{n^2}{a^2} u_n$

c) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + a^2} \left[e^{ax} \left(a \cos nx + n \sin nx \right) \right]_0^{\pi}$

d) $u_n = \dfrac{1}{n^2 - a^2} \left[(-1)^n e^{a\pi} a - a \right]$

Question 06 : v_n vérifie, pour tout n entier naturel :

a) $v_n = \dfrac{1}{an} \left[-e^{ax} \cos nx \right]_0^{\pi}$

b) $v_n = \dfrac{1}{a} \left[e^{ax} \left(\sin nx - \dfrac{n}{a} \cos nx \right) \right]_0^{\pi} - \dfrac{n^2}{a^2} v_n$

c) $v_n = \dfrac{1}{n^2 - a^2} \left[e^{ax} \left(n \cos nx - a \sin nx \right) \right]_0^{\pi}$

d) $v_n = \dfrac{1}{n^2 + a^2} \left[(-1)^{n+1} n e^{a\pi} + n \right]$

Question 07 : La valeur absolue de u_n est, pour tout n entier naturel, majorée par :

a) $\dfrac{|a|}{n^2 + a^2}$ **b)** $\dfrac{|a|(1 + e^{a\pi})}{|n^2 - a^2|}$

Et celle de v_n est majorée par :

c) $\dfrac{n(1 - e^{a\pi})}{n^2 + a^2}$ **d)** $\dfrac{1 + e^{a\pi}}{an}$

Question 08 : La suite (v_{2k}), k entier strictement positif, est équivalente à la suite de terme général :

a) $\dfrac{1 - e^{a\pi}}{2k}$ **b)** $\dfrac{1 + e^{a\pi}}{k}$ **c)** $\dfrac{1}{2k}$ **d)** $\dfrac{1}{k}$

Question 09 :

a) Les suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être convergentes car elles ne sont pas de signe constant

b) Les suites (u_n) et (v_n) convergent car toute suite majorée est convergente

c) La suite (u_n) converge vers 0

d) La suite (u_n) diverge car la suite de terme général $\cos nx$ n'admet pas de limite

PARTIE III

Soit l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *la fonction* $\phi_1 : I \to \mathbf{R}$, $u \mapsto \dfrac{1}{x^2(\cos^2 u + \sin^2 u)}$ *et la fonction* $\phi_2 : I \to \mathbf{R}, u \mapsto \dfrac{\sin u}{x^2(\cos^2 u + \sin^2 u)}$, *$x$ étant un paramètre réel.*

Question 10 : La fonction ϕ_1 :

a) est définie sur I pour tout x réel

b) est définie sur I pour tout x positif ou nul

c) est définie et continue sur I pour tout x réel strictement positif

d) est continue sur I uniquement pour tout x réel strictement positif

Question 11 : La fonction ϕ_2 :

a) est dérivable sur I pour tout x réel non nul

b) est dérivable sur I pour tout x réel

c) est dérivable sur $]0, \pi/2]$ pour tout x réel et a pour dérivée :

$$\phi_2'(u) = \frac{x^2 \cos^3 u + 2(x^2 - 1/2) \cos u \sin^2 u}{\left(x^2(\cos^2 u + \sin^2 u)\right)^2}$$

d) a pour dérivée pour tout u appartenant à I et pour tout x réel strictement positif :

$$\phi_2'(u) = \frac{\cos u}{1 - x^2} \sin 2u$$

Question 12 : Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \phi_1(u)\, du$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \phi_2(u)\, du$

a) sont définies pour tout x réel car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment

b) sont définies pour tout x réel non nul car toute fonction définie sur un segment est intégrable sur ce segment

c) sont définies pour tout x réel strictement positif car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment

d) sont définies pour tout x réel non nul car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment

Question 13 : La fonction F définie par $F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{1}{1+t^2} dt$:

a) n'est pas définie sur $\mathbf{R}$

b) est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$

c) a pour limite $\frac{\pi}{2}$ lorsque X tend vers $+\infty$

d) a pour limite $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.

Question 14 : On pose $J(x) = \int_0^{\pi/2} \phi_1(u)\, du$ et $K(x) = \int_0^{\pi/2} \phi_2(u)\, du$, $x \in]0,1[$.
On obtient en utilisant les changements de variable $t = (\tan u)/x$ et $v = \cos u$:

a) $J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{x(1+x^2t^2)}{(1+x^2t^2)(1+t^2)x^2} dt$

b) $J(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

c) $K(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^2v^2+1-v^2} dv$

d) $K(x) = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-x^2)v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{2(1-x^2)}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$

Question 15 : La fonction $K(x)$ est équivalente au voisinage de 0 à la fonction :

a) $\ln x$ **b)** $-\ln x$ **c)** $\frac{1}{x}$ **d)** $-2\ln x$

On considère l'application f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x \int_0^{\pi/2} u\phi_1(u)\, du$.

Question 16 : La fonction f vérifie :

a) $f(1) = 0$ **b)** $f(1) = \frac{\pi^2}{8}$

c) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x\frac{\pi^2}{4}$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$

d) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$

Question 17 : La fonction h définie sur **R** par $h(u) = u - \frac{\pi \sin u}{2}$ vérifie :

a) h est indéfiniment dérivable sur **R**

b) h est dérivable mais n'est pas deux fois dérivable sur **R**

c) h est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car h' est strictement positive sur ce segment

d) h est négative ou nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car h est décroissante puis croissante sur ce segment.

Question 18 : On a pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$:

a) $xK(x)\frac{\pi}{2} \leq f(x)$ **b)** $0 \leq f(x) \leq xK(x)\frac{\pi}{2}$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ car $K(x)$ est équivalent à $-2\ln x$ en 0

d) $\frac{\pi}{2} \leq \lim_{x\to 0} f(x)$

Question 19 : Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ a pour limite, si elle existe :

a) $+\infty$ **b)** $-\infty$ **c)** $\frac{\pi^2}{4}$ **d)** $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{u}{x(\cos^2 u+\sin^2 u)}du$

Question 20 : Ici $x\in\mathbf{R}_+^\star$, $k\in\mathbf{R}$ avec $0<|k|<\dfrac{x}{2}$ et pour tout $u\in I$: $P=x(\cos u)^2+(\sin u)^2$ et $Q=k(\cos u)^2$. On pose : $h(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}du$.

a) $\dfrac{1}{P+Q}=\dfrac{1}{P}-\dfrac{Q}{P^2}+\dfrac{Q^2}{P^2(P+Q)}$ **b)** $\dfrac{1}{P+Q}=\dfrac{1}{P}+\dfrac{Q}{P^2}-\dfrac{Q^2}{P^2(P+Q)}$

c) $\left|\dfrac{g(x+k)-g(x)}{k}+h(x)\right|\leq|k|\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4 u\,du}{((x/2)\cos^2 u+\sin^2 u)^3}$

d) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=h(x)$

Question 21 : On a :

a) $f(x)=xg(x)$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$

b) $f(x)=xg(x^2)$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et a pour dérivée :

$$f'(x)=g(x^2)+2x^2g'(x^2)=\int_0^{\pi/2}\frac{u\left(3x^2\cos^2 u+\sin^2 u\right)}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}du$$

d) f n'est pas dérivable sur $]0,+\infty[$

PARTIE IV

Dans l'espace vectoriel $F=\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, on considère l'ensemble E des fonctions de la forme $P(x)\mathrm{ch}\,x+Q(x)\mathrm{sh}\,x$, où P et Q sont deux polynômes de $\mathbf{R}_2[X]$. On désigne par f_1,f_2,f_3,f_4,f_5 et f_6 les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_1(x)=\mathrm{ch}\,x,\ f_2(x)=\mathrm{sh}\,x,\ f_3(x)=x\mathrm{ch}\,x$$

$$f_4(x)=x\mathrm{sh}\,x,\ f_5(x)=x^2\mathrm{ch}\,x,\ f_6(x)=x^2\mathrm{sh}\,x$$

Question 22 : L'ensemble E :

a) est un anneau

b) est un sous espace vectoriel de F

c) n'est pas un sous espace vectoriel de F

d) est un groupe pour la loi de multiplication des fonctions

Question 23 : On pose $f(x)=(\lambda_1+\lambda_2x+\lambda_3x^2)\mathrm{ch}\,x+(\mu_1+\mu_2x+\mu_3x^2)\mathrm{sh}\,x$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)e^{-x}=0$ pour tous réels λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)e^{-x}=0$ si et seulement si $\lambda_1+\mu_1=\lambda_2+\mu_2=\lambda_3+\mu_3=0$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)e^{x}=0$ pour tous réels λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)e^{x}=0$ si et seulement si $\lambda_1-\mu_1=\lambda_2-\mu_2=\lambda_3-\mu_3=0$

Question 24 : La famille des six fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 :

a) est une famille génératrice et liée de E

b) est libre mais n'est pas une base de E

c) est une base de E

d) n'est ni libre ni génératrice dans E

Question 25 : On note D l'application de F dans F qui à une fonction f associe sa dérivée f'.

a) D est linéaire de E dans F mais n'est pas un endomorphisme de E

b) D n'est pas un endomorphisme de F

c) D est un endomorphisme de E

d) D n'est pas une application linéaire

Question 26 : La matrice de D dans une base de E constituée des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6

a) est une matrice carrée d'ordre 5

b) est une matrice carrée d'ordre 6 symétrique réelle

c) est une matrice carrée d'ordre 6 antisymétrique réelle

d) est une matrice à 5 lignes et 6 colonnes

Question 27 : L'application D

a) réalise une bijection de E sur lui-même

b) ne réalise pas une bijection de E sur lui-même car elle n'est pas injective

c) ne réalise pas une bijection de F sur lui-même car $D(f + k) = D(f)$ avec k est une fonction constante donnée

d) réalise une bijection de F sur lui-même

Question 28 : On note id l'application identique de F dans lui-même.

a) L'image de E par l'application $(D^2 - id)$ est l'espace vectoriel de dimension 4
engendré par la famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

b) L'image de E par l'application $(D^2 - id)$ est un espace vectoriel de dimension 3

c) L'image de E par l'application $(D^2 - id)^2$ est un espace vectoriel de dimension 3

d) L'image de E par l'application $(D^2 - id)^p$, pour p entier supérieur ou égal à 3 est l'espace réduit au vecteur nul

Question 29 : Le noyau de l'application $(D^2 - id)$:

a) est réduit à l'application nulle car $(D^2 - id)$ est une application linéaire injective

b) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $f''(x) - f(x) = 0$

c) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $(f')^2(x) - f(x) = 0$

d) est l'espace de dimension 2 engendré par la famille $\{f_1, f_2\}$

Question 30 : Le noyau de l'application $(D^2 - id)^2$:

a) est réduit à l'application nulle car $(D^2 - id)$ est une application linéaire injective

b) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $f''(x) - f(x) = 0$

c) est l'espace de dimension 2 des solutions de l'équation différentielle $f''(x) - f(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$, où λ et μ sont des constantes réelles

d) est l'espace de dimension 4 engendré par la famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Question 31 : Le noyau de l'application $(D^2 - id)^3$

a) est l'espace des solutions de l'équation différentielle $f''(x) - f(x) = 0$

b) est l'espace de dimension 2 des solutions de l'équation différentielle $f''(x) - f(x) = \lambda_1 \operatorname{ch} x + \mu_1 \operatorname{sh} x + \lambda_2 x \operatorname{ch} x + \mu_2 x \operatorname{sh} x$, où $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 sont des constantes réelles

c) est l'espace de dimension 4 engendré par la famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

d) est réduit à l'application nulle car $(D^2 - id)$ est une application linéaire injective

Question 32 : L'ensemble des solutions de $y^{(6)}(x) - 3y^{(4)}(x) + 3y''(x) - y(x) = 0$

a) est égal à $\mathsf{Ker}\left((D^2 - id)^3\right)$

b) est égal à $\mathsf{Ker}\left((D^2 - id)^4\right)$

c) est l'espace vectoriel E de dimension 6

d) est égal à $\mathsf{Im}\left((D^3 - id)^2\right)$

PARTIE V

Soit n un entier positif ou nul, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels de degré au plus égal à n. Il existe, pour tout n entier naturel, un et un seul polynôme P_n appartenant à E_n qui vérifie : $\cos(nx) = P_n(\cos x)$ *pour tout x réel.*

Question 33 : On a, pour tout n entier strictement positif :

a) $P_{n+1} + P_{n-1} = XP_n$

b) $P_{n+1} - P_{n-1} = 2XP_n$

c) $P_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 2p \leq n} (-1)^p \binom{n}{p} X^{n-2p}(1 - X^2)^p$

d) $P_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} X^{n-2p}(X^2 - 1)^p$

Question 34 : Ces polynômes vérifient pour tout n, P'_n désignant le polynôme dérivé de P_n

a) $P_n(0) = 1$ et P_n est pair si n est pair

b) $P_n(-1) = 0$ et P_n est impair si n est impair

c) $P_{2n}(0) = (-1)^n$ et $P'_{2n+1}(0) = (-1)^n(2n + 1)$

d) $P_n(-1) = (-1)^n$ et $P'_n(-1) = 0$

Question 35 : Pour $n > 0$, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction polynôme $P_n(x)$ est équivalente à :

a) $2^n x^n$ **b)** $2^{n-1} x^n$ **c)** $(n-1)! x^n$ **d)** $n! x^n$

Question 36 : Les polynômes P_3 et P_4 sont :

a) $P_3 = 4X^3 - 3X$ et $P_4 = 8X^4 + 8X^2 + 1$

b) $P_3 = 4X^3 + 3X$ et $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

c) $P_3 = 3X^3 - 4X$ et $P_4 = 12X^4 + 8X^2 + 1$

d) $P_3 = 6X^3 - 4X$ et $P_4 = 12X^4 - 8X^2 + 1$

CORRIGE

<u>Question 01</u> : On a évidemment $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
Les assertions b) et c) sont vraies et **les assertions a) et d) sont fausses**.

<u>Question 02</u> : Le mieux est de partir à chaque fois de la forme du second membre. Développons $a + bj^2 + cj$, on a :

$$a + bj^2 + cj = x + y + z + j^2x + y + jz + jx + y + j^2z$$

et donc :

$$a + bj^2 + cj = x(1 + j + j^2) + 3y + z(1 + j + j^2) = (x + z)(1 + j + j^2) + 3y$$

On peut déjà dire que **l'assertion a) est vraie** et que **l'assertion d) est fausse**. Par ailleurs,

$$a + bj + cj^2 = x(1 + j + j^2) + y(1 + j + j^2) + 3z$$

ce qui implique que **l'assertion c) est fausse**. Enfin,

$$a + b + c = 3x + y(1 + j + j^2) + z(1 + j + j^2)$$

et par conséquent **l'assertion b) est fausse**

<u>Question 03</u> : En utilisant le développement de la question 02, on a alors :

$$x = \frac{1}{3}(a + b + c),\ y = \frac{1}{3}(a + bj^2 + cj) \text{ et } z = \frac{1}{3}(a + bj + cj^2)$$

La solution du système de l'énoncé est un triplet (x, y, z) et il y a donc une et une seule solution ce qui implique que **les assertions a) et b) sont fausses**. Ce que l'on a fait plus haut permet enfin décrire que **l'assertion c) est vraie** et que **l'assertion d) est fausse**

<u>Question 04</u> : Si on n'a pas d'idée, commençons par éliminer les assertions qui ne seraient pas des conditions suffisantes. Si a, b et c sont réels, x est réel mais $a + bj + cj^2$ n'est pas en général réel (prendre par exemple $a = b = 0$ et $c = 1$) et **l'assertion a) est fausse**. Si a, $b\,c$ sont non réels, par exemple prenons $a = c = i$ et $b = -i$, il reste $x = i/3$ qui n'est pas réel. **L'assertion b) est fausse**. On peut ensuite remarquer que **l'assertion d) est fausse** car j^2 et $-j$ ne sont pas conjugués ! Attention, il faut tout lire dans une assertion. Enfin, si $a \in \mathbf{R}$ et $b = c = 0$, il est clair que x, y et z sont réels. Réciproquement, si par exemple $b = c = 1$, on a :

$$bj^2 + cj = -1 = bj + cj^2$$

et donc le cas $a \in \mathbf{R}$ et $b = c = 1$ donne encore x, y et z réels, la condition de l'assertion c) est suffisante mais non nécessaire. **l'assertion c) est fausse**.

<u>Question 05</u> : Soit par parties deux fois, soit en posant $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ et en intégrant et en séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient :

$$u_n = \frac{e^{\pi a}\left[a\cos(\pi n) + n\sin(\pi n)\right] - a}{a^2 + n^2} \quad et\ v_n = \frac{-e^{\pi a}\left[n\cos(\pi n) - a\sin(\pi n)\right] + n}{a^2 + n^2}$$

puis comme n est un entier, on obtient :

$$u_n = \frac{ae^{\pi a}(-1)^n - a}{a^2 + n^2} \quad et\ v_n = \frac{-ne^{\pi a}(1)^n + n}{a^2 + n^2}$$