1 Récurrence et suites

MÉMO

1 **Raisonnement par récurrence**

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel fixé. Pour montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on procède en trois temps :

- **Initialisation –** On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité –** Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on montre que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$.
- **Conclusion –** Pour tout $n \geqslant n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

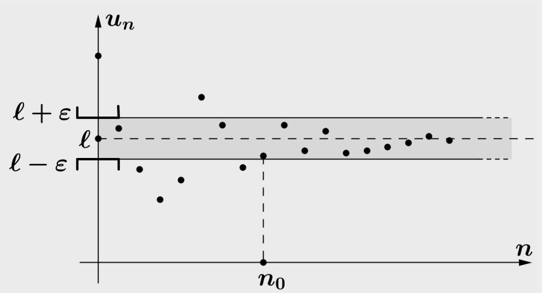
2 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, aussi notée (u_n) ou u, peut notamment être définie par

- une **formule explicite** donnant u_n en fonction de n (exemple : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n^2$) ;
- une **relation de récurrence** en donnant le premier terme u_0 et une expression de u_{n+1} en fonction de u_n (exemple, $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 5$).

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et n_0 un entier naturel. On dit que la suite u est

- **croissante** à partir de n_0 lorsque : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$;
- **décroissante** à partir de n_0 lorsque : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant u_n$;
- **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante ;
- **constante** à partir de n_0 lorsque : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$;
- **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$;
- **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant m$;
- **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

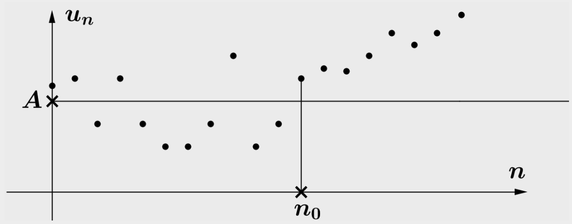
4 On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque : pour tout réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont dans l'intervalle ouvert $]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. Dans ce cas, ℓ est unique et est appelée **la limite** de (u_n).
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



Une suite (u_n) non convergente est dite **divergente** et deux cas peuvent se présenter :

- (u_n) n'admet pas de limite ;
- (u_n) admet une **limite infinie** (on dit qu'elle diverge vers l'infini).

Par exemple, (u_n) a pour limite $+\infty$ si, pour tout réel A (aussi grand que l'on veut), il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A.



$\boxed{5}$ **Opérations sur les limites** (F.I. désigne une forme indéterminée)

- **Somme $(u_n + v_n)$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$

- **Produit $(u_n v_n)$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	F.I.

- **Quotient $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$	F.I.

$\boxed{6}$ **Comparaison et limites**

ROC
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $v_n \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang.
  1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
  2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- Théorème dit **« des gendarmes »**

  Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.

  Si $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ (u_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent et ont toutes les deux la même limite } \ell \end{cases}$

  alors (v_n) est convergente et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

7 Suites monotones et limites

ROC
- Soit (u_n) une suite croissante.

  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$.

ROC
- Si une suite est **croissante et non majorée**, alors elle a pour limite $+\infty$.

  Si une suite est **décroissante et non minorée**, alors elle a pour limite $-\infty$.

- Si une suite est **croissante et majorée**, alors elle converge.

  Si une suite est **décroissante et minorée**, alors elle converge.

8 Limites usuelles

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et : $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et : $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

ROC
- Soit $x \in]0\,; +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. (**Inégalité de Bernoulli**)

  On en déduit que si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Quelques clés pour les exercices

A Quelques réflexes d'ordre général

Pour montrer que ...	on peut par exemple...
une suite (u_n) est monotone	• étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ • comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (si (u_n) est > 0 ou < 0) • utiliser une récurrence • étudier la fonction f (cas $u_n = f(n)$)
une suite (u_n) converge	• montrer qu'elle est croissante majorée • montrer qu'elle est décroissante minorée • utiliser le théorème « des gendarmes » • déterminer la limite par calcul direct (cas $u_n = f(n)$) • utiliser les résultats sur les suites géométriques
une suite (u_n) diverge	• utiliser une comparaison • déterminer la limite par calcul direct (cas $u_n = f(n)$) • utiliser les résultats sur les suites géométriques
une suite (u_n) est arithmétique	• montrer que $u_{n+1} - u_n = r$ (r constante)
une suite (u_n) est géométrique	• montrer que $u_{n+1} = q\,u_n$ (q constante)

B Suites arithmétique et géométrique

	Arithmétique	**Géométrique**
Relation de récurrence	$\begin{cases} u_0 = \dots \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_0 = \dots \\ v_{n+1} = q\,v_n \end{cases}$
Formule explicite	$u_n = u_p + (n-p)r$ (si $p = 0$, $u_n = u_0 + nr$)	$v_n = v_p\,q^{n-p}$ (si $p = 0$, $v_n = v_0\,q^n$)
Somme de n termes consécutifs	$n \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$	$\text{premier terme} \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

C Comment lever une forme indéterminée ?

On peut distinguer quatre formes indéterminées : « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « $\dfrac{0}{0}$ », « $\infty - \infty$ » et « $\infty \times 0$ ».

Pour lever une forme indéterminée, on peut...

- mettre en facteur le terme prépondérant (▶ Ex. 7 : 1, 3, 4, 5)
- développer et réduire l'expression (▶ Ex. 7 : 2)
- utiliser l'expression conjuguée (avec $\sqrt{\ }$) (▶ Ex. 7 : 6)

D Deux algorithmes incontournables

Exemples avec la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$.

▶ Algorithme de calcul d'un terme.

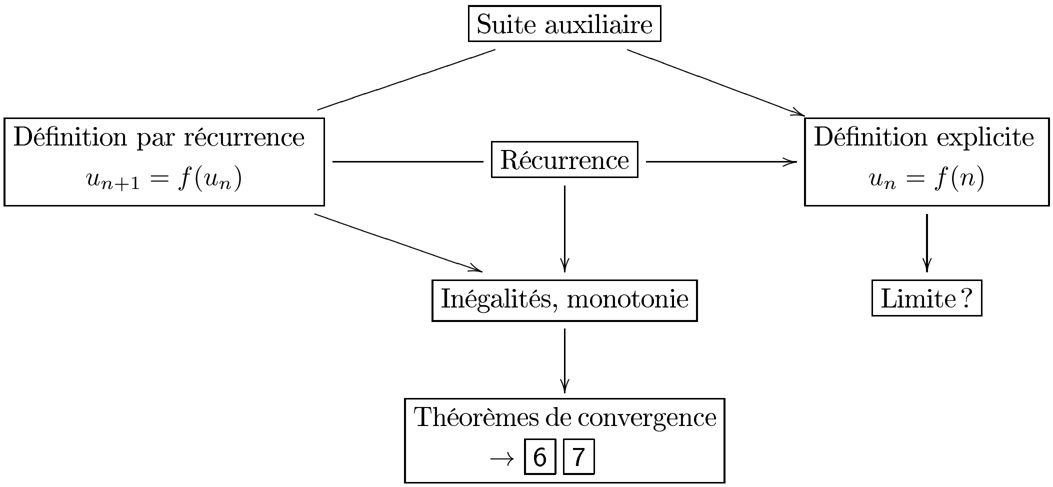
Variables	i et n sont des entiers naturels u est un réel		
Entrée	Saisir n	⟵	n est le rang du terme cherché
Initialisation	Affecter à u la valeur 2	⟵	on initialise u à $u_0 = 2$
Traitement	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $\sqrt{u+6}$ Fin de Pour	⟵	à partir de u_0, la relation de récurrence permet de calculer u_1, puis u_2 ... jusqu'à u_n
Sortie	Afficher u	⟵	valeur u_n cherchée

▶ Algorithme de seuil : déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 2,99$.

Variables	n est un entier naturel u est un réel		
Initialisation	Affecter à u la valeur 2 Affecter à n la valeur 0	⟵	on initialise u à u_0 et n au rang correspondant, c'est-à-dire 0.
Traitement	Tant que $u \leqslant 2,99$ Affecter à u la valeur $\sqrt{u+6}$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin de Tant que	⟵	tant que la condition **contraire** de celle cherchée est vraie, on recommence le calcul du terme suivant et augmente donc le rang de 1
Sortie	Afficher n	⟵	on obtient le rang cherché

Important – L'algorithme précédent renvoie bien un nombre. En effet, on peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, ce qui assure l'existence d'un terme u_{n_0} tel que $u_{n_0} > 2,99$.

E Quelques repères pour étudier une suite



Mettre en pratique

Exercice 1

Rang d'une propriété Solution p. 30

$\boxed{1}$

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel. Écrire les propriétés $\mathcal{P}(n)$ suivantes au rang 0 puis au rang $n+1$.

1. $\mathcal{P}(n)$: « $2^n > n + 1$. »
2. $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 80 - 20 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. »
3. $\mathcal{P}(n)$: « Le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n. »
4. $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. »
5. $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > n$. »

Cet exercice est un travail préparatoire important avant d'aborder le raisonnement par récurrence.

Méthode 1

Raisonner par récurrence

Montrons par exemple que pour tout entier $n \geqslant 2$, $2^n > n + 1$.

► On commence tout d'abord par énoncer clairement ce que l'on veut démontrer :

> Démontrons par récurrence que la propriété
> $$\mathcal{P}(n) : « 2^n > n + 1 »$$
> est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

► **Initialisation** – Cette étape est fondamentale ; il s'agit de mettre en évidence le rang à partir duquel la propriété est vraie. D'après l'énoncé, il s'agit du rang $n = 2$.

> $2^2 = 4$ et $2 + 1 = 3$; on a donc bien $2^2 > 2 + 1$ ce qui signifie que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

► **Hérédité** – L'hérédité consiste à montrer que si l'on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier n (ici supérieur ou égal à 2), alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est également vraie.

> Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $2^n > n + 1$. En multipliant chaque membre par l'entier positif 2, il s'ensuit $2^{n+1} > 2n + 2$.
> Or, pour tout $n > 0$, $2n + 2 > n + 2$ donc $2^{n+1} > n + 2$ (c'est à dire $\mathcal{P}(n + 1)$).
> Nous avons ainsi montré que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n + 1)$ vraie.

► **Conclusion** – La propriété est initialisée en 2 et est héréditaire donc :

> Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\quad 2^n > n + 1$.

► **Ex. 2** et **3**

Exercice 2

Récurrence et définition explicite Solution p. 30

1 2 E

1. Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 0,5u_n + 2 \end{cases}$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 4 \times 0,5^n + 4$.

2. Soit (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = \dfrac{-2}{v_n - 3} \end{cases}$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n + 1}$.

Exercice 3

Récurrence et inégalité Solution p. 31

1 2 E

1. Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n > n$.

2. Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \end{cases}$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

3. Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 0,6 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 1 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$.

4. Soit f une fonction croissante définie sur $\mathbf{R}$ et (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que si $u_1 \leqslant u_0$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 4

Interprétation d'inégalités Solution p. 33

3 6 7 E

On donne ci-dessous des inégalités valables à partir d'un certain entier naturel n_0. Pour chacune d'entre elles, donner la ou les conclusion(s) que l'on peut en déduire, notamment quant à la limite éven-