# INTRODUCTION

## A. LES CONCOURS DE CATÉGORIE B

### I. DÉFINITION

Les fonctionnaires qui assurent des fonctions d'application et de rédaction sont classés en catégorie B.

### II. CONDITIONS D'ACCÈS

Les concours externes de catégorie B sont, en général, ouverts aux titulaires du baccalauréat ou d'une qualification au moins équivalente. Toutefois, certains concours bien que classés en catégorie B nécessitent un diplôme professionnel qui sanctionne une formation professionnelle post-baccalauréat (diplôme d'Etat d'infirmier, diplôme d'Etat d'assistant social, BTS...).
La reconnaissance de l'expérience professionnelle (REP) qui permet de substituer une expérience au diplôme requis est entrée en vigueur le 1er août 2007.

Un certain nombre de concours de catégorie B sont organisés au niveau déconcentré ; au lieu d'un seul concours, organisé au niveau national pour pourvoir des postes sur tout le territoire, plusieurs concours sont organisés, dans chaque région où les postes existent. Les candidats ont ainsi l'assurance d'être affectés, pour leur premier poste, dans la région où ils ont passé le concours. C'est en particulier le cas des concours de secrétaires d'administration scolaire et universitaire, qui sont organisés par les rectorats d'académie, mais aussi des concours de secrétaires administratifs, organisés par les préfectures de région.

Nous vous conseillons de vous reporter sur les sites des administrations pour connaître le dernier programme en vigueur et les dates des concours.

Les inscriptions sont gratuites et se font longtemps avant les épreuves.
Surveiller les dates car les délais sont très courts.

Pour certains concours, il y a une épreuve de présélection sous la forme d'un QCM (Questionnaire à Choix Multiples).

Si vous la réussissez, vous passez alors les épreuves écrites traditionnelles.
Parmi celles-ci, il y a une épreuve de Mathématiques et même deux pour l'Insee.

### III. DURÉE ET NOMBRE D'EXERCICES

En général, pour l'épreuve de Mathématiques vous avez **3 h** pour résoudre **3 ou 4 exercices ou problèmes**.

### IV. CONSIGNES

Chaque concours a ses règles. Elles sont renseignées en début de sujet.
Pour certains sujets de concours, la calculatrice est interdite.

## B. CONSEILS MÉTHODOLOGIQUES

### I. CONSIGNES AVANT LE JOUR J

- **Préparer** ce type d'épreuve très longtemps avant le jour de l'épreuve.
- **Travailler** régulièrement et de façon structurée.
- **Faire** des fiches et les compléter au fur et à mesure de la préparation.
- **Faire** des sujets posés en temps réel et dans les conditions de l'examen.
  Il ne faut pas se limiter aux concours que vous voulez passer.
- **Noter** vos faiblesses et chercher à y remédier.
- **Repérer** les types d'exercices proposés et en tirer des modèles que vous rédigerez avec soin.
- **Apprendre** à calculer car <u>la calculatrice peut être interdite</u>.

### II. CONSIGNES POUR LE JOUR J

- **Arriver** en avance.
- **Venir** avec une montre ou un réveil.
- **Prévoir** un aliment énergétique et une boisson.
- **Lire** les consignes.
- **Utiliser** un brouillon pour vos recherches et calculs.
- **Ne pas mettre** un point d'honneur à vouloir répondre absolument à toutes les questions. L'essentiel est d'être sélectionné. Il faut donc chercher à glaner un maximum de points.
- **Commencer** par ce que vous avez le plus de chance de réussir.
- **Laisser de côté**, dans un premier temps, les questions qui ne vous inspirent pas.
- **Ne pas s'attarder** sur des questions.
- **Répondre** à un maximum de questions.
- **Revenir** sur les questions écartées, s'il vous reste du temps.

## C. LA PRÉPARATION

Vous comptez présenter les épreuves de Mathématiques. Il ne faut pas trop compter sur la chance : ce sont des concours très sélectifs et la moyenne ne suffit pas car il y a beaucoup de candidats et peu d'élus.

Mais pas de défaitisme : **la stratégie de la réussite existe**.

Elle est basée sur les connaissances, mais pas seulement. Il faut y ajouter :

- des techniques de mise en œuvre ;
- accompagnées d'un travail de fond très régulier ;
- et d'une certaine confiance en soi ; partir perdant peut être aussi préjudiciable qu'un manque de travail.

Il faut aussi se diversifier : on ne se prépare pas à un seul concours mais à plusieurs.

Les différents programmes se recoupant pratiquement, on met toutes les chances de son côté en s'inscrivant à un maximum de concours.

C'est dans cet esprit que nous avons conçu ce manuel.

Il s'articule en trois parties :

① Des énoncés de sujets de concours ;

② Les corrigés détaillés ;

③ Des rappels de cours.

**Pour une bonne préparation, il faut :**

- faire le plein de connaissances en travaillant le cours ;
- choisir un sujet et le traiter dans les conditions du concours : avec ou sans calculatrice, en respectant la durée ;
- après avoir vérifié vos résultats, votre travail n'est pas terminé.

**Il va falloir travailler, à fond, le corrigé**.

Nous avons délibérément renoncé aux éléments de réponse pour proposer un corrigé modèle type détaillé.

Il permet de vérifier si vous avez correctement justifié vos réponses, si vous êtes allés au bout des raisonnements et si vous avez énoncé correctement les théorèmes utilisés.

Ces derniers sont systématiquement rappelés dans des encadrés.

Le corrigé vous aidera aussi à constituer un ensemble de fiches, très pratiques pour mémoriser et réviser.

Faites un maximum de sujets, mêmes ceux des concours que vous ne comptez pas passer.

**Il faut savoir que, à connaissances égales, la qualité de la rédaction peut faire la différence**.

C'est en travaillant pas à pas le corrigé que vous ferez le plus de progrès et que vous comprendrez comment s'articule l'ensemble de tous les problèmes.

**ATTENTION :**

Il y a un piège à éviter : c'est celui de commencer par lire le corrigé sans avoir fait le problème.

**Lire des mathématiques ne suffit pas, il faut s'y atteler.**

Que ce livre vous aide à réussir, nous vous souhaitons bon courage.

Nous remercions par avance ceux qui nous adresserons leurs remarques et leurs critiques.

**BONNE PRÉPARATION** ☺

# PROGRAMME

## I. ALGÈBRE

Résolution d'équations et d'inéquations du premier et second degré.
Résolution de systèmes d'équations linéaires à deux ou trois inconnues.
Résolution de systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues.

## II. FONCTIONS NUMÉRIQUES

Généralités : continuité, dérivabilité de la somme, de la différence, du produit ou du quotient des fonctions usuelles.
Limites : opérations, compositions, comparaisons.
Croissances comparées.
Comportement asymptotique.
Composition des fonctions.
Nombre dérivé d'une fonction en un point.
Sens de variation d'une fonction à partir de l'étude de sa dérivée.
Représentations graphiques.
Liste des fonctions usuelles : polynômes, exponentielles, logarithmes, fonctions circulaires, sommes, différences, quotients, produits et composition de ces fonctions.

## III. CALCUL INTÉGRAL

Intégration, primitives, valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, calculs d'aires.
Propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles).

## IV. STATISTIQUES

Description statistique d'un échantillon ou d'une population.
Représentations graphiques.
Nuage de points associé à une série statistique à deux variables numériques.
Ajustement affine par la méthode des moindres carrés.

## V. PROBABILITÉS

Dénombrement : arrangements, permutations, combinaisons.
Calculs de probabilités.
Conditionnement et indépendance. Formule des probabilités totales.
Lois de probabilités discrètes.
Cas particuliers : loi de Bernoulli, loi binomiale.
Espérance, variance, écart-type.
Modélisation d'expériences indépendantes (dés, pièces, urnes...)

## VI. SUITES NUMÉRIQUES

Suites monotones, majorées, minorées, bornées, convergentes.
Limites : opérations.
Suites arithmétiques, suites géométriques.
Somme des *n* premiers termes.
Suites vérifiant une relation de récurrence du type :
$u_{n+1} = au_n + b$ ou $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

## VII. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique, conjugué.
Somme, produit, quotient.
Équation du second degré à coefficients réels.
Représentation géométrique.
Affixe d'un point, d'un vecteur.
Forme trigonométrique (module - argument - interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct - notation exponentielle).

## VIII. GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Équations cartésiennes de plans ou droites de l'espace.
Calcul vectoriel : somme, produit scalaire, produit vectoriel, relation de Chasles.
Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.
Distance entre deux points.

# CONTRÔLEUR DES FINANCES PUBLIQUES 2016

**Durée : 3 heures.**

*L'usage des calculatrices est autorisé (à l'exclusion des téléphones portables), y compris les calculatrices programmables et alphanumériques à fonctionnement autonome sans imprimante, à entrée unique par clavier.*
*Les règles de calcul, équerre, compas et rapporteurs ainsi que les tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique sont également autorisés.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.
Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

## EXERCICE 1

L'objectif de cet exercice est la recherche des solutions de l'équation :

$$e^{x+1} - \frac{2x}{x-1} = 0.$$

Soit $u$ la fonction définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par : $u(x) = e^{x+1}$ et $v$ la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par : $v(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}u$ et $\mathscr{C}v$ leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

### Partie A. Étude des fonctions *u* et *v*

**1)** **a)** Étudier la limite de $u$ en $+\infty$ puis en $-\infty$.
En déduire que $\mathscr{C}u$ admet une asymptote que l'on précisera.
**b)** Étudier le sens de variation de $u$.

**2)** **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} v(x)$ ; $\lim\limits_{x\to 1^-} v(x)$ ; $\lim\limits_{x\to -\infty} v(x)$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} v(x)$.
En déduire que $\mathscr{C}v$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
**b)** Étudier le sens de variation de $v$.
Dresser son tableau de variation.

**3)** **a)** Construire les courbes représentatives $\mathscr{C}u$ et $\mathscr{C}v$ sur le même graphique.
**b)** En déduire graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$e^{x+1} - \frac{2x}{x-1} = 0.$$

Donner graphiquement une valeur approchée de chacune des solutions.

**Partie B. Résolution de l'équation**

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

**1) a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

Étudier le sens de variation de $f$.
Dresser son tableau de variation.
**b)** Calculer $f(-1)$.
Que peut-on en déduire ?

**2)** On se place sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

**a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique $\alpha$ sur cet intervalle.
Calculer $f(1{,}2)$ puis $f(1{,}3)$.
En déduire un encadrement de la solution $\alpha$.

**b)** Calculer $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

**Partie C. Calcul d'aire**

On considère toujours la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{x+1} - \frac{2x}{x-1}.$$

**1) a)** Montrer que sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, la fonction $G$ définie par :

$$G(x) = 2x + 2\ln(1-x)$$

est une primitive de la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \frac{2x}{x-1}.$$

**b)** En déduire une primitive de $f$ sur $]-\infty\,;1[$.

**2) a)** Soit $a$ un réel de l'intervalle $]-1\,;1[$.

Calculer l'aire du domaine plan limité par les courbes $\mathscr{C}u$, $\mathscr{C}v$ et les deux droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = a$.
**b)** Déterminer la limite de cette aire lorsque $a$ tend vers 1.

## EXERCICE 2

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ par : $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{5}x\right)$.

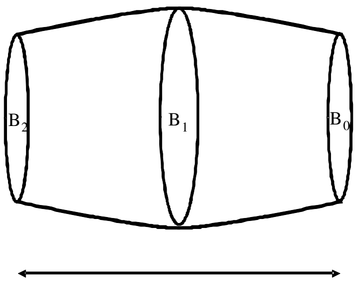
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**1) a)** Montrer que la fonction $f$ est paire.
Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

**b)** Montrer que la fonction $f$ est décroissante sur $[0\,;\,\pi]$.

**c)** Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

**2)** La partie comprise sur le graphique entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\pi$ et $x = \pi$, est assimilée à une plaque. Cette plaque, en tournant autour de l'axe des abscisses engendre un solide qui ressemble à un tonnelet.
On désigne par V le volume de ce solide.




La valeur exacte, (en unités de volume), du volume de ce solide de révolution est :

$$V = \pi\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx.$$

**a)** En utilisant la formule $\cos^2\theta = \dfrac{\cos(2\theta) + 1}{2}$, montrer que :

$[f(x)]^2 = 2\cos\left(\dfrac{2x}{5}\right) + 2,$ puis calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_{0}^{\pi} [f(x)]^2\, dx.$$

**b)** En déduire la valeur exacte de V.

**c)** Donner une valeur approchée en $\text{cm}^3$ par excès du volume V.

## EXERCICE 3

L'objectif de cet exercice consiste en l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

**1)** Soit $N_0$ le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, $N_1$ le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, $N_k$ le nombre d'atomes de carbone 14 après $k$ siècles, où $k$ est un entier.
On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

**a)** Donner l'expression de $N_1$ en fonction de $N_0$ puis de $N_{k+1}$ en fonction de $N_k$.

**b)** En déduire la nature de la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et l'expression de $N_k$ en fonction de $N_0$ et $k$.

**c)** Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$.