CONTROLEUR DU TRESOR 2006

Calculatrice autorisée.
Durée : 3 heures.

EXERCICE 1

Partie A

f est la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + e^x.$$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

g est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1 - x}{1 + e^{-x}}.$$

1) Déterminer le tableau de variation de g.

2) Démontrer que $g(\alpha) = -\alpha$.

3) Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Construire la courbe représentative Γ de g et préciser la tangente à Γ au point 0.

4) Démontrer que la droite Δ d'équation $x + y - 1 = 0$ est asymptote à la courbe Γ et préciser la position de Γ par rapport à Δ.

5) **a)** Démontrer que pour tout réel x, $g'(x) = -1$ équivaut à $g(x) = -1$.

b) En déduire qu'il existe un unique point A de Γ en lequel la tangente à Γ est parallèle à la droite Δ.

c) Placer A sur le graphique.

EXERCICE 2

Huit équipes de football sont qualifiées pour les quarts de finale d'une compétition. Les équipes A, B, C et D rencontrent respectivement les équipes E, F, G et H pour une place en demi-finale.

Les équipes A, B, C et D sont favorites pour la qualification en demi-finale avec des probabilités de gain respectives de 90 %, 80 %, 80 % et 70 %.

1) Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux équipes favorites en demi-finale ?

2) En demi-finale, les probabilités de gain sont identiques pour toutes les équipes. Quelle est la probabilité de gain de la compétition de chacune des 8 équipes ?

3) Cette compétition donne lieu à des paris. Pour 1 euro joué, les gains pour les équipes A, B, C, D, E, F, G, H sont respectivement de 4 euros, 5 euros, 5 euros, 7 euros, 30 euros, 15 euros, 15 euros, 18 euros.
Compte tenu des réponses apportées à la question précédente, sur quelle équipe un parieur rationnel a-t-il le plus intérêt à miser ?

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie pour $x > \frac{1}{2}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 1}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$.

On peut donc définir la suite $u = (u_n)$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer u_n en fonction de n.

2) On considère les suites $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ telles que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \text{ et } w_n = \ln(v_n).$$

a) Vérifier que (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel n.

b) Démontrer que la suite w est une suite géométrique.

c) Exprimer pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

d) En déduire la limite de la suite u.

EXERCICE 4

1) On considère une roue de loterie divisée en six secteurs égaux. Un secteur est rouge, trois sont blancs et deux sont bleus.

Un joueur fait tourner cette roue et regarde la couleur obtenue. Si elle est rouge, il gagne ; si elle est blanche, il perd ; si elle est bleue, il doit refaire tourner la roue.

Si à l'issue de cette deuxième épreuve, la couleur obtenue est rouge, le joueur gagne ; si elle est blanche ou bleue, il perd.

Calculer les probabilités suivantes :

a) probabilité P_1 de gagner dès la première épreuve ;

b) probabilité P_2 de gagner à l'issue de la deuxième épreuve ;

c) probabilité P' de gagner la partie.

2) La roue possède maintenant x secteurs égaux (x est un nombre entier supérieur ou égal à quatre) ; un secteur est rouge, trois sont blancs et les autres sont bleus. Le principe du jeu reste le même que précédemment.

Si le joueur gagne à la première épreuve, il reçoit 4 euros ; s'il perd à cette première épreuve, il verse 2 euros ; s'il obtient un secteur rouge à la seconde épreuve, il reçoit 6 euros ; s'il obtient un secteur blanc, il verse 1 euro et s'il obtient un secteur bleu, il ne reçoit ni ne verse rien.

On appelle X la variable aléatoire réelle, égale à $+A$ si le joueur a gagné A euros, à $-B$ si le joueur a perdu B euros.

a) Etablir la loi de probabilité de X en fonction de x.

b) Déterminer en fonction de x, l'espérance mathématique de X, notée : $E(X) = \sum x_i \, p_i$.

c) Quel doit être le nombre total de secteurs de la roue pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire $E(X) = 0$?

d) Quel doit être le nombre total de secteurs pour que $E(X)$ soit maximale ?

CONTROLEUR DU TRESOR 2007

Calculatrice autorisée.
Durée : 3 heures.

EXERCICE 1

Un tiroir contient, pêle-mêle, cinq paires de chaussures noires, trois paires de chaussures vertes et deux paires de chaussures rouges.
Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents.

Dans toutes les questions, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) On tire simultanément deux chaussures au hasard et on admet l'équiprobabilité de chaque tirage.

a) Calculer la probabilité de l'événement A « Tirer deux chaussures de la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'événement B « Tirer un pied gauche et un pied droit ».

c) Calculer la probabilité de l'événement C « Tirer les deux chaussures d'un même modèle ».

2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire, successivement et sans remise, une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Déterminer les différentes valeurs de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

EXERCICE 2

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis ; il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost.

Chaque semaine, les matières stockées perdent, par décomposition ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.

Soit v_1, v_2 et v_3 le volume total en litres stocké après les premier, deuxième et troisième samedis.

De manière générale, soit v_n le volume stocké le $n^{\text{ième}}$ samedi après la tonte.

1) **a)** Calculer v_1, v_2 et v_3.

b) Calculer les volumes v_4, v_5 et v_6 exprimés en litres, stockés respectivement les 4ème, 5ème et 6ème samedis après la tonte.

2) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

3) On définit, pour tout $n \geq 1$, t_n par : $t_n = 160 - v_n$.

a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison r, déterminer r et calculer son premier terme t_1.

b) En déduire les expressions de t_n puis de v_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de t_n puis celle de v_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

Clément va acheter du pain à la boulangerie à quelques minutes de la fermeture de celle-ci. Il ne reste plus que 26 pains de 4 catégories différentes aux tarifs suivants :

- 8 pains au levain au tarif unitaire de 1,60 euro ;
- 7 pains d'antan au tarif unitaire de 1,20 euro ;
- 6 pains de campagne au tarif unitaire de 1 euro ;
- 5 pains tradition au tarif unitaire de 0,80 euro.

Clément demande à la vendeuse de mettre les pains dans des sacs.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains contenant au moins un pain au levain ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains contenant au moins un pain au levain et un pain d'antan ?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains contenant au moins un pain au levain, un pain d'antan et un pain de campagne ?

4) Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 3 pains dont le coût total est de 3,60 euros ?

5) Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains différents sachant que la vendeuse a déjà mis dans le sac un pain au levain et un pain d'antan ?

6) Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains identiques en prenant 4 pains au hasard ?

EXERCICE 4

Etude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x^2 + e^{-x}.$$

Partie A

Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 4x - e^{-x}.$$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0 ; 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

3) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide d'une calculatrice.

4) Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Etude et représentation graphique de la fonction *f*.

1) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

2) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0.

3) Soit la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = 2x^2$.

Etudier :

a) Le signe de $f(x) - p(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

b) La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $f(x) - p(x)$.

c) Interpréter graphiquement ces deux derniers résultats.

4) Représenter dans un repère orthogonal (unités graphiques : 10 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées) la courbe $\mathscr{C}$ représentant f, la parabole $\mathscr{P}$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie C

Calcul d'aire.

On se propose de déterminer l'aire $\mathcal{A}(a)$ de la partie de plan contenant les points $M(x, y)$ tels que : $0 \leq x \leq a$, $2x^2 \leq y \leq 2x^2 + \mathrm{e}^{-x}$ où a est un nombre positif donné.

1) Calculer $\mathcal{A}(a)$ en cm².

2) Quelle est la limite de $\mathcal{A}(a)$ lorsque a tend vers l'infini ?

EXERCICE 5

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}} \; ; \; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x \; ; \; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

1) Calcul de *I*.

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.

b) En déduire la dérivée f' de f.

c) Calculer la valeur de I.

2) Calcul de *J* et de *K*.

a) Vérifier que $J + 2I = K$.

b) A l'aide d'une intégration par partie portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduire les valeurs de J et de K.

CONTROLEUR DU TRESOR 2008

Calculatrice autorisée.
Durée : 3 heures.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$.

1) Etudier les limites de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$, et de $f(x) - x$ en $+\infty$.

2) Calculer $I = \int_2^3 \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) \mathrm{d}x$ en utilisant l'intégration par partie.

3) En déduire l'aire de la partie délimitée par $\mathscr{C}$, la courbe représentant $f(x)$, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

4) Représenter graphiquement cette aire dans un repère orthonormal (échelle 3 cm par unité).

EXERCICE 2

Chacun des 10 mots de la phrase « rien ne sert de courir, il faut partir à point » est inscrit sur un carton.
On suppose les cartons indiscernables au toucher, et on les place dans une urne.

On tire au hasard un carton (les tirages sont donc supposés équiprobables).

- Si le mot inscrit sur le carton contient une voyelle, on gagne 10 points.
- Si le mot inscrit sur le carton contient deux voyelles, on perd 20 points.
- Si le mot inscrit sur le carton contient trois voyelles, on gagne 20 points.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus (positif ou négatif).

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X.

3) On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique est nulle.
Sans changer les gains obtenus pour les mots contenant une ou trois voyelles, quelle devrait être la perte pour un mot contenant deux voyelles dans un jeu équitable ?