NORMES, DISTANCES, APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES

On dispose depuis longtemps d'outils simples de mesure des longueurs dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ avec la valeur absolue et le module, et plus généralement dans les espaces euclidiens avec la distance euclidienne. On se propose d'étendre ces outils de mesure des distances qui seront indispensables pour définir ensuite tous les concepts de base de l'analyse : convergence des suites, limites des fonctions, et donc continuité, dérivabilité, etc.

Pour cela, on définit les notions de norme d'un vecteur et d'espace vectoriel normé qui furent introduites par Riesz (1880-1956) en 1917. Dans ce contexte, on sait affecter à chaque vecteur un nombre réel positif qui représente sa longueur et on appelle distance de deux points x, y la norme du vecteur x–y. On définit plus généralement la distance entre deux points d'un ensemble quelconque et les espaces métriques, introduits par Fréchet (1878-1973) en 1906. Toutefois, les seuls espaces métriques qui interviendront dans la suite de ce cours seront toujours des parties d'un espace vectoriel normé munies de la distance associée à la norme. On examine pour finir la question de l'équivalence des normes et distances, qui permettra ou non d'affirmer l'identité des notions d'analyse introduites au moyen de celles-ci.

On étudie ensuite les applications lipschitziennes : ce sont des applications qui vérifient des inégalités de la forme $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$, et dont l'usage est assez fréquent. Ainsi, la norme d'un espace vectoriel normé, la distance d'un espace métrique, et surtout les applications linéaires continues, sont des exemples d'applications lipschitziennes.
Le fait que les applications linéaires d'un espace vectoriel normé dans un autre soient continues si et seulement si elles sont lipschitziennes constitue un résultat exceptionnel, car si les applications lipschitziennes sont continues, la réciproque est fausse en général.
On termine en définissant la norme subordonnée d'une application linéaire continue, puis en présentant quelques exemples et applications de ces normes subordonnées.

***

I. NORMES ET ESPACES VECTORIELS NORMÉS

■ I.1 Définition et exemples de normes

Définition

On considère un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle *norme sur E* toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés :
(1) $\forall\, x \in E, \qquad N(x) = 0 \iff x = 0_E$.
(2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, x \in E, \quad N(\lambda\, x) = |\lambda|\, N(x)$.
(3) $\forall\, x, y \in E^2, \qquad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).
On appelle alors *espace vectoriel normé, ou en abrégé e.v.n.*, le couple (E, N).

On remarque qu'on a toujours $N(0_E) = 0$ en appliquant la seconde propriété avec $\lambda = 0$. Ainsi, pour établir la propriété (1), il suffit de montrer que $N(x) = 0$ implique $x = 0_E$.

Premières remarques sur les normes

◊ Les normes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seront *toujours* la valeur absolue et le module.
Ajoutons que le corps de base, comme dans *tout le cours d'analyse*, est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

◊ Si (E, N) est un espace vectoriel normé, il est immédiat que N induit une norme sur tous les sous-espaces vectoriels de E, et tout sous-espace vectoriel d'un e.v.n. sera désormais normé au moyen de cette norme induite.

◊ On tire de l'inégalité triangulaire l'inégalité suivante (*seconde inégalité triangulaire*) :

$$\boxed{\forall\, x, y \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)}$$

Celle-ci résulte en effet des deux inégalités ci-dessous :

$$N(x) = N(y + (x - y)) \leq N(y) + N(x - y), \quad \text{d'où } N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$
$$N(y) = N(x + (y - x)) \leq N(x) + N(y - x), \quad \text{d'où } N(y) - N(x) \leq N(x - y).$$

Ajoutons qu'en pratique, on notera $x \longrightarrow N(x)$ ou $x \longrightarrow \|x\|$ une norme sur E.
On étudie maintenant quelques exemples d'espaces vectoriels normés usuels.

<u>**Proposition 1**</u> *(normes sur un espace vectoriel de dimension finie)*
Soit un espace vectoriel E de dimension m rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$.
On pose pour $p \geq 1$ et pour tout vecteur $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \dots + x_m\, e_m$ de E :

$$\begin{array}{|lll} N_\infty(x) & \text{ou} & \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|). \\ N_1(x) & \text{ou} & \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|. \\ N_p(x) & \text{ou} & \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_m|^p)^{1/p} \end{array}$$

Alors N_1, N_p $(p \geq 1)$ et N_∞ sont des normes sur E, dites normes d'indices 1, p et ∞ associées à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$.

Démonstration

Il est immédiat de vérifier que N_1 et N_∞ sont deux normes ; traitons le cas de N_1 :

- $\forall\, x \in E,\ N_1(x) = |x_1| + \ \dots\ + |x_m| = 0 \implies |x_1| = \ \dots\ = |x_m| = 0$, donc $x = 0_E$.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E,\ N_1(\lambda x) = |\lambda x_1| + \ \dots\ + |\lambda x_m| = |\lambda|\,(|x_1| + \ \dots\ + |x_m|) = |\lambda|\, N_1(x)$.
- $\forall\, x,\ y \in E,\ N_1(x+y) = \sum_{k=1}^m |x_k + y_k| \ \le\ \sum_{k=1}^m |x_k| + \sum_{k=1}^m |y_k| = N_1(x) + N_1(y)$.

  (Il suffit de sommer les inégalités $|x_k + y_k| \ \le\ |x_k| + |y_k|$ pour $1 \le k \le m$).

Montrons maintenant que N_p est une norme sur E pour $p \ge 1$.

- si $N_p(x) = (|x_1|^p + \ \dots\ + |x_m|^p)^{1/p} = 0$, alors $|x_1| = \ \dots\ = |x_m| = 0$, donc $x = 0_E$.
- $N_p(\lambda x) = (|\lambda x_1|^p + \ \dots\ + |\lambda x_m|^p)^{1/p} = |\lambda|\,(|x_1|^p + \ \dots\ + |x_m|^p)^{1/p} = |\lambda|\, N_p(x)$.
- Montrons que $N_p(x+y) \le N_p(x) + N_p(y)$ pour x et y éléments de E.

L'inégalité est immédiate si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$ et on exclut désormais ce cas.
La fonction $t \longrightarrow t^p$ est convexe sur $[0, +\infty[$ car sa dérivée seconde est positive.
On en déduit pour $0 \le \lambda \le 1$ et u, v positifs : $(\lambda\, u + (1-\lambda)\, v)^p \ \le\ \lambda\, u^p + (1-\lambda)\, v^p$.
Appliquons cette inégalité avec $u = |x_i| / N_p(x),\ \ v = |y_i| / N_p(y)$:

$$\left(\lambda\, \frac{|x_i|}{N_p(x)} + (1-\lambda)\, \frac{|y_i|}{N_p(y)}\right)^p \le \lambda\, \frac{|x_i|^p}{N_p^p(x)} + (1-\lambda)\, \frac{|y_i|^p}{N_p^p(y)}.$$

Sommant ces inégalités pour $1 \le i \le m$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^m \left(\lambda\, \frac{|x_i|}{N_p(x)} + (1-\lambda)\, \frac{|y_i|}{N_p(y)}\right)^p \ \le\ \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

En choisissant maintenant $\lambda = \frac{N_p(x)}{N_p(x)+N_p(y)}$, donc $1 - \lambda = \frac{N_p(y)}{N_p(x)+N_p(y)}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{|x_i| + |y_i|}{N_p(x) + N_p(y)}\right)^p \ \le\ 1 \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^m (|x_i| + |y_i|)^p \ \le\ (N_p(x) + N_p(y))^p.$$

Comme $|x_i + y_i| \ \le\ |x_i| + |y_i|$, on a en prenant ensuite la puissance $1/p$:

$$N_p(x+y) \ \le\ N_p(x) + N_p(y).$$

On a ainsi établi les trois propriétés montrant que N_p est une norme pour $p \ge 1$. ■

Remarques sur les normes N_p associées à une base

◊ Lorsque $E = \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}^m$, les normes précédentes sont associées à la base canonique lorsqu'aucune autre indication n'est donnée.
Dans ce cas, on notera qu'on retrouve la norme euclidienne usuelle pour $p = 2$:

$$\boxed{N_2(x) \ \text{ ou } \ \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ \dots\ + |x_m|^2}}$$

Rappelons que c'est la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}^m$.

◊ Pour tout vecteur x, on a $\lim_{p \longrightarrow +\infty} N_p(x) = N_\infty(x)$ d'après l'encadrement suivant dans lequel les deux extrémités ont pour même limite $N_\infty(x)$ lorsque p tend vers $+\infty$:

$$N_\infty(x) \ \le\ N_p(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ \dots\ + |x_m|^p)^{1/p} \ \le\ m^{1/p}\, N_\infty(x).$$

Proposition 2 *(normes sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur [a, b])*
On pose pour $p \geq 1$ et pour toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$\left|\begin{array}{lll} N_\infty(f) & \text{ou} & \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \ / \ a \leq x \leq b\}. \\ N_1(f) & \text{ou} & \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt. \\ N_p(f) & \text{ou} & \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \end{array}\right.$$

Alors N_1, N_p $(p \geq 1)$ et N_∞ sont des normes sur $C([a, b], \mathbb{K})$.

On dira alors que :
• N_1 est la *norme de la convergence en moyenne*,
• N_2 est la *norme de la convergence en moyenne quadratique*,
• N_∞ est la *norme de la convergence uniforme*.

Démonstration

Montrons que l'application $f \longrightarrow \|f\|_1$ est une norme sur $C([a, b], \mathbb{K})$:

- si $N_1(f) = 0$, l'intégrale de la fonction continue positive $|f|$ est nulle sur $[a, b]$, et ceci implique que la fonction f est nulle.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in C([a, b], \mathbb{K}),\ N_1(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f(t)|\, dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)|\, dt = |\lambda|\, N_1(f)$.
- $\forall f, g \in C([a, b], \mathbb{K}),\ N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.

(Il suffit d'intégrer l'inégalité $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ pour $a \leq t \leq b$.

Montrons maintenant que l'application $f \longrightarrow \|f\|_p$ est une norme sur $C([a, b], \mathbb{K})$:

- si $N_p(f) = 0$, l'intégrale de la fonction continue positive $|f|^p$ est nulle sur $[a, b]$, et ceci implique que la fonction f est nulle.
- $N_p(\lambda f) = \left(\int_a^b |\lambda f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} = |\lambda|\, N_p(f)$.
- Montrons que $N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$ pour $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.

L'inégalité est immédiate si $f = 0$ ou $g = 0$ et on exclut désormais ce cas.
La fonction $t \longrightarrow t^p$ est convexe sur $[0, +\infty[$ car sa dérivée seconde est positive.
On en déduit pour $0 \leq \lambda \leq 1$ et u, v positifs : $(\lambda u + (1 - \lambda) v)^p \leq \lambda u^p + (1 - \lambda) v^p$.
Appliquons cette inégalité avec $u = |f(t)| / N_p(f)$, $v = |g(t)| / N_p(g)$:

$$\left(\lambda \frac{|f(t)|}{N_p(f)} + (1 - \lambda) \frac{|g(t)|}{N_p(g)}\right)^p \leq \lambda \frac{|f(t)|^p}{N_p^p(f)} + (1 - \lambda) \frac{|g(t)|^p}{N_p^p(g)}.$$

Intégrant ces inégalités pour $a \leq t \leq b$, on obtient :

$$\int_a^b \left(\lambda \frac{|f(x)|}{N_p(f)} + (1 - \lambda) \frac{|g(x)|}{N_p(g)}\right)^p dx \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

En choisissant maintenant $\lambda = \frac{N_p(f)}{N_p(f) + N_p(g)}$, donc $1 - \lambda = \frac{N_p(g)}{N_p(f) + N_p(g)}$, on obtient :

$$\int_a^b \left(\frac{|f(t)| + |g(t)|}{N_p(f) + N_p(g)}\right)^p dx \leq 1 \quad \text{ou} \quad \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)^p\, dx \leq (N_p(f) + N_p(g))^p.$$

Comme $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$, on a en prenant ensuite la puissance $1/p$:

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

On a ainsi établi les trois propriétés montrant que N_p est une norme pour $p \geq 1$. ■

Nous n'avons pas abordé le cas de la norme $f \longrightarrow \|f\|_\infty$ dans cette démonstration car nous le traitons maintenant dans le cadre plus général des fonctions bornées, dans lequel entrent les fonctions continues sur un segment puisqu'on sait que celles-ci sont bornées.

Définition

Une application f définie d'un ensemble X dans un espace vectoriel normé $(E, \|\,.\,\|)$ est dite *bornée* s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall\, x \in X, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

En particulier, si $X = \mathbb{N}$, une suite (u_n) est *bornée* s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq M.$$

<u>Proposition 3</u> *(une norme sur l'espace vectoriel des applications bornées sur X)*

On pose pour toute application bornée f d'un ensemble X dans un e.v.n. E :

$$N_\infty(f) \quad \text{ou} \quad \|f\|_\infty = \sup\{\, \|f(x)\| \ / \ x \in X \,\}.$$

Alors N_∞ est une norme (*norme de la convergence uniforme*) sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de l'ensemble X dans l'espace vectoriel normé E.

Démonstration

L'ensemble noté $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées d'un ensemble X vers un e.v.n. E est un sous-espace de l'espace des applications de X dans E puisqu'il est non vide et stable par combinaison linéaire (car si f et g sont bornées, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi).

La borne supérieure $\|f\|_\infty = \sup\{\, \|f(x)\| \ / \ x \in X \,\}$ est définie dans $\mathbb{R}$ car l'ensemble $\{\, \|f(x)\| / x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et on établit maintenant que l'application $f \longrightarrow \|f\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$.

• Si $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \ / \ x \in X\} = 0$, alors $\forall\, x \in X, \ \|f(x)\| = 0, \ f(x) = 0$ et $f = 0$.

• Montrons que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ (avec $\lambda \neq 0$) et $f \in \mathcal{B}(X, E)$:

- On a pour tout $x \in X$: $\|\lambda f(x)\| = |\lambda|\, \|f(x)\| \leq |\lambda|\, \|f\|_\infty$.
  Cette inégalité montre que $|\lambda|\, \|f\|_\infty$ est un majorant des nombres $\|\lambda f(x)\|$.
  Puisque $\|\lambda f\|_\infty$ est le plus petit majorant de ces nombres, on a $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\, \|f\|_\infty$.
- On en déduit $\|f\|_\infty = \left\|\frac{1}{\lambda}\, \lambda f\right\|_\infty \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda f\|_\infty$ en changeant λ et f en $\frac{1}{\lambda}$ et λf.
  On en déduit $|\lambda|\, \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$, d'où l'égalité $|\lambda|\, \|f\|_\infty = \|\lambda f\|_\infty$.

• Soient deux fonctions bornées $f, g \in \mathcal{B}(X, E)$. On a donc :

$$\forall\, x \in X, \ \ \|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant des réels $\|(f+g)(x)\|$; puisque $\|f+g\|_\infty$ est le plus petit des majorants de ces nombres, on a donc $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ■

Pour $X = \mathbb{N}$, l'ensemble des applications bornées de $\mathbb{N}$ dans E n'est autre que l'ensemble des suites bornées $u = (u_n)$ de E, dont l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$, noté $l^\infty(E)$, est normé par :

$$\|u\|_\infty = \sup\{\, \|u_n\| \ / \ n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Compléments sur les normes N_2

Les normes notées N_2 sont importantes parmi les normes N_p ; outre le fait qu'elles sont associées à des produits scalaires, fait sur lequel on reviendra plus tard, on constate que :

- c'est la norme euclidienne dans l'espace $\mathbb{R}^m$:

$$\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2}}$$

- c'est la norme de la convergence en moyenne quadratique dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$:

$$\boxed{\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}}$$

L'exercice suivant propose une démonstration directe du fait qu'il s'agit bien de normes.

▲ **Exercice :** Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme N_2.

a) En notant que l'expression $\sum_{k=1}^m (\lambda\, x_k + y_k)^2$ est nécessairement positive, établir l'inégalité suivante dans laquelle $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\left|\sum_{k=1}^m x_k\, y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m |x_k|^2}\, \sqrt{\sum_{k=1}^m |y_k|^2}\,.$$

En déduire que N_2 est une norme sur $\mathbb{R}^m$.

b) Etablir de façon analogue l'inégalité suivante dans laquelle f, $g \in C([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt}\, \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}\,.$$

En déduire que N_2 est une norme sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

---

a) L'expression proposée s'écrit comme suit :

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^m (\lambda\, x_k + y_k)^2 = \lambda^2 \sum_{k=1}^m x_k^2 + 2\,\lambda \sum_{k=1}^m x_k\, y_k + \sum_{k=1}^m y_k^2.$$

On voit que f est un trinôme du second degré en λ (si on exclut le cas trivial où $x = 0$) qui est toujours positif puisqu'il s'agit d'une somme de carrés de nombres réels.
Son discriminant est donc négatif, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^m x_k\, y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^m x_k^2 \times \sum_{k=1}^m y_k^2.$$

Les deux premiers axiomes de la norme N_2 sont immédiats à vérifier.
L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, car on a pour x, $y \in E$:

$$\begin{aligned} N_2^2(x + y) &= \sum_{k=1}^m x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^m x_k\, y_k + \sum_{k=1}^m y_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^m x_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}\, \sqrt{\sum_{k=1}^m y_k^2} + \sum_{k=1}^m x_k^2 \\ &\leq N_2^2(x) + 2\, N_2(x)\, N_2(y) + N_2^2(y) = (N_2(x) + N_2(y))^2. \end{aligned}$$

b) Considérons l'expression suivante :

$$f(\lambda) = \int_a^b (\lambda\, f(t) + g(t))^2\, dt = \lambda^2 \int_a^b f^2(t)\, dt + 2\,\lambda \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \int_a^b g^2(t)\, dt.$$

C'est un trinôme du second degré en λ (si on exclut le cas $f = 0$) qui est toujours positif.
Son discriminant est donc négatif, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\, dt \times \int_a^b g^2(t)\, dt.$$

On conclura de même pour établir que N_2 est une norme.

▲ **Exercice :** On considère un élément f appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
En encadrant $|f|$ par des fonctions en escalier convenablement choisies, établir que :

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} N_p(f) = N_\infty(f).$$

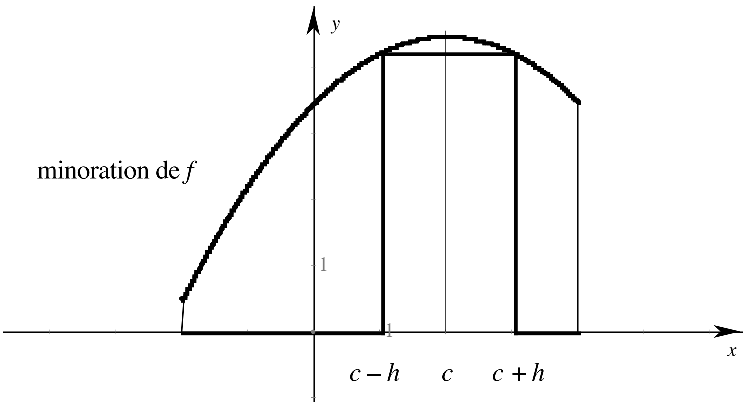
En majorant la fonction $|f|$ par $N_\infty(f)$ sur le segment $[a, b]$, on obtient l'inégalité :

$$N_p(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b (N_\infty(f))^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}} \, N_\infty(f).$$

Pour minorer cette fonction continue $|f|$, remarquons que celle-ci atteint son maximum en un point c du segment $[a, b]$ et qu'on a alors par continuité de $|f|$ en c :

$$(\forall\, \varepsilon > 0),\ (\exists\, h > 0),\ (\forall\, x \in [a, b]) : \quad |x - c| \le h \implies ||f(x)| - |f(c)|| \le \varepsilon.$$
$$|x - c| \le h \implies N_\infty(f) - |f(x)| \le \varepsilon.$$
$$|x - c| \le h \implies |f(x)| \ge N_\infty(f) - \varepsilon.$$

Ainsi, on peut minorer sur le segment $[a, b]$ la fonction $|f|$ par la fonction en escalier φ définie par $\varphi(x) = N_\infty(f) - \varepsilon$ sur $[c - h, c + h]$ et par $\varphi(x) = 0$ sinon.
La figure ci-dessous représente la fonction $|f|$ et cette fonction en escalier minorante φ :



En minorant la fonction $|f|$ par φ sur le segment $[a, b]$, on obtient l'inégalité :

$$N_p(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \ge \left(\int_a^b (\varphi(x))^p \, dx\right)^{1/p} = (2\,h)^{1/p} \, (N_\infty(f) - \varepsilon).$$

Ainsi, on a obtenu l'encadrement suivant de $N_p(f)$:

$$(2\,h)^{1/p} \, (N_\infty(f) - \varepsilon) \le N_p(f) \le (b-a)^{1/p} \, N_\infty(f).$$

Faute d'être assuré de l'existence de $\lim_{p \to +\infty} N_p(f)$, on ne peut passer à la limite dans cette inégalité (et on note que le théorème d'encadrement ne s'applique pas non plus).
On procède donc comme suit pour conclure :

• Le membre de gauche de l'inégalité tend vers $N_\infty(f) - \varepsilon$ quand p tend vers $+\infty$.
  Il est donc supérieur ou égal à $N_\infty(f) - 2\,\varepsilon$ pour p assez grand ($p \ge p_1$).
• Le membre de droite de l'inégalité tend vers $N_\infty(f)$ quand p tend vers $+\infty$.
  Il est donc inférieur ou égal à $N_\infty(f) + 2\,\varepsilon$ pour p assez grand ($p \ge p_2$).

Ainsi, on a $N_\infty(f) - 2\,\varepsilon \le N_p(f) \le N_\infty(f) + 2\,\varepsilon$ pour p assez grand ($p \ge \max(p_1, p_2)$), ce qui donne par définition (puisque ε est arbitraire) :

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} N_p(f) = N_\infty(f).$$

■ I.2 Normes équivalentes

Définition

On considère un espace vectoriel réel ou complexe E muni de deux normes N_1, N_2.
On dit que les normes N_1 et N_2 sont *équivalentes* s'il existe deux nombres réels α, β strictement positifs tels que :

$$\forall\, x \in E, \quad \alpha\, N_1(x) \;\leq\; N_2(x) \;\leq\; \beta\, N_1(x).$$

On établit facilement que l'équivalence des normes de E est une relation d'équivalence.
En particulier, on utilise parfois la transitivité : si les normes N_1, N_2 sont équivalentes, et si les normes N_2, N_3 sont équivalentes, alors N_1 et N_3 sont équivalentes.
L'intérêt des normes équivalentes apparaîtra plus loin dans le fait qu'elles conduisent aux mêmes notions d'analyse (mêmes notions de limite, de continuité, etc).

Exemple de normes équivalentes

Considérons un espace vectoriel réel ou complexe E de dimension finie m rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ dans lequel un vecteur x s'écrit $x = x_1\, e_1 + \ldots + x_m\, e_m$.
Rappelons qu'on a défini précédemment les normes suivantes dans E (avec $p \geq 1$) :

$$\begin{array}{|lll} N_\infty(x) & \text{ou} & \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|). \\ N_1(x) & \text{ou} & \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|. \\ N_p(x) & \text{ou} & \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_m|^p)^{1/p} \end{array}$$

Les normes N_p (où $p \geq 1$) et N_∞ sont alors équivalentes d'après l'inégalité suivante :

$$N_\infty(x) \;\leq\; N_p(x) \;=\; (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_m|^p)^{1/p} \;\leq\; m^{1/p}\, N_\infty(x).$$

Et comme toutes les normes N_p $(p \geq 1)$ sont équivalentes à N_∞, elles sont équivalentes entre elles puisque l'équivalence des normes est transitive.

On démontrera plus loin (au chapitre 4, *Topologie et propriétés des fonctions continues*) le théorème fondamental suivant, admis pour l'instant, et qu'on a vérifié ci-dessus dans le cas des normes usuelles d'un espace de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B}$.

<u>Proposition 4</u> *(équivalence des normes en dimension finie)*
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

En revanche, dans un espace vectoriel est de dimension infinie, deux normes ne sont pas équivalentes en général, et il importe de le savoir.
A titre d'exemple, on démontre maintenant que les normes usuelles ne sont justement pas équivalentes sur l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour établir que deux normes N, N' ne sont pas équivalentes, on raisonne par l'absurde en supposant au contraire qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que, pour tout vecteur x de E on ait $\alpha\, N(x) \leq N'(x) \leq \beta\, N(x)$, puis on construit un vecteur x ou une suite de vecteurs (x_n) pour lesquels l'une de ces inégalités est fausse, ce qui conduit à une contradiction.