Avant-propos

Pour qui s'interroge sur les analogies qui pourraient exister entre musique et mathématiques, les éléments de réflexion ne manquent pas. Ainsi, ces deux disciplines sont-elles les seules à avoir développé pour elles-mêmes une écriture qui leur soit propre, toutes deux demandent une grande rigueur et les nombres y sont d'un usage important. On établit souvent des analogies, qui ont d'ailleurs leur légitimité, entre certaines opérations de l'une et de l'autre. La transposition musicale peut par exemple être rapprochée de la translation mathématique – toutes deux déplacent un objet sans le déformer ni changer sa direction – ou la rétrogradation musicale (où l'on inverse le sens de lecture de la partition) peut être vue comme une symétrie [1]. L'équivalence des notes à octave près voit une traduction en termes de congruences mathématiques [2]. En ce qui concerne la composition, Arnold Schoenberg, inventeur du système de composition à douze sons, le dodécaphonisme, n'exprime-t-il pas sa fierté d'avoir composé une pièce qui, si l'on fait opérer un demi-tour à la partition, reste identique à elle-même [3], c'est-à-dire dont l'écriture est invariante par une rotation de 180 degrés ? L'adagio du Kammerkonzert de Berg n'est-il pas entièrement symétrique, c'est-à-dire rigoureusement égal à lui-même si on le lit de la dernière note à la première à la place de l'ordre normal [4] ? Les règles sur l'usage des séries utilisées par de nombreux compositeurs de musique contemporaine renvoient à des idées faciles à traduire en mathématiques, ce qui leur a d'ailleurs valu une part de leurs critiques. Il n'est jusqu'à certaines études psychologiques qui aillent remarquer que l'activité dans chacun de ces domaines fait travailler

1. Le lecteur intéressé pourra pour cela consulter par exemple [**62**], du compositeur et pédagogue Olivier Messiaen.

2. Ainsi, si l'on considère une gamme à 12 notes correspondant aux 12 demi-tons de la gamme de tempérament égal et si l'on considère que les notes sont équivalentes quelle que soit l'octave à laquelle elles sont jouées, on peut décrire cette gamme à l'aide de l'ensemble appelé $Z/12Z$ des nombres entiers modulo 12. La définition de cet ensemble fait que l'on considère que deux nombres entiers sont équivalents – on dit qu'ils sont congruents modulo 12 – si leur différence est un multiple de 12. De même que deux notes situées à une ou plusieurs octaves d'écart, c'est-à-dire à une distance d'une ou plusieurs fois 12 demi-tons portent le même nom, deux nombres distants d'un multiple de douze font partie de ce qu'on appelle une même classe et on donne une même dénomination à tous les nombres de cette classe.

3. Il le fait, par exemple dans son livre [**86**].

4. Ce deuxième mouvement de l'oeuvre est effectivement tel que ses mesures 361 à 480 sont les rétrogradées exactes des mesures 241 à 360.

les deux hémisphères cérébraux (qui, dans une approche sans doute simplifiée, correspondent à la part créative et la part de calcul). S'agit-il là d'un effet lié à la grande foi en la capacité à expliquer tout phénomène à l'aide des mathématiques que le deuxième tiers du XX^e siècle et le structuralisme ont porté ? Cela se peut en partie, mais un regard sur l'histoire permet de trouver une pièce entièrement symétrique qui avait déjà été écrite au Moyen Âge [5]. Dès l'Antiquité, une relation théorique entre hauteurs de sons consonantes (i.e. sonnant bien ensemble) et proportions simples a été établie. Dans la composition musicale elle-même, des recherches en ce sens sont menées. Les proportions correspondant aux consonances théoriques peuvent intervenir dans la partie rythmique, au niveau du plan de l'œuvre ou du choix des sons eux-mêmes. A la Renaissance, le compositeur Dufay a usé des proportions architecturales du Dôme de la cathédrale de Florence pour composer la pièce qui devait l'inaugurer [6], imitant en cela les trouvères du haut Moyen Âge, qui cherchaient à construire leurs chansons sur un système de proportions empruntées aux édifices religieux. Mozart a développé quant à lui un système pour composer des Walzer à l'aide de jeux de dés, selon une modélisation du hasard qui renvoie à la théorie des probabilités [7]. Enfin, on peut rappeler la citation du théoricien de la musique et compositeur Jean Philippe Rameau, dont l'œuvre théorique encore plus que l'œuvre musicale, a eu une place primordiale dans les théories occidentales de la musique : "*Nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la musique pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des mathématiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité dont je ne m'apercevais pas auparavant*" [8]. Il ne semble donc guère possible de considérer le dialogue entre mathématique et musique comme un épiphénomène lié à l'importance de la première à l'époque moderne. On peut alors aborder la question générale de leurs rapports de différentes manières. La première consiste en une approche philosophique générale de la nature de leurs correspondances, voire en son insertion dans une réflexion plus large sur ce que pourrait être la nature d'une pensée proprement musicale ou mathématicienne. Une telle démarche recèle des difficultés importantes. Cela provient en particulier de la place primordiale de l'apprentissage, et donc de la culture, en ce qui concerne les perceptions auditives. La recherche à propos du langage a mis en évidence un phénomène de *surdité phonologique* significatif à cet égard : vers l'âge de six mois, un nourrisson apprend à trier les sons utiles pour les langues pratiquées autour de lui et à faire automatiquement abstraction des autres,

5. Cette pièce musicale a été composée sur les paroles non mensongères "ma fin est mon commencement et mon commencement ma fin", par Clément Marot, cf [**17**] par exemple.

6. Voir pour cette anecdote connue par exemple [**82**] Tome 1. La thèse a été avancée par Charles W. Warren, et ses arguments, concernant la partie rythmique au moins, paraissent incontestables.

7. Cet exemple est présenté dans [**71**].

8. Ceci est tiré de sa préface à sa *Génération harmonique* et cité en exergue dans [**71**].

qu'il ne remarque plus à partir de ce moment-là. Certaines personnes adultes, ayant parfois pourtant l'oreille très éduquée de musiciens professionnels, ont par exemple toutes les peines à reconnaître ou à prononcer les sons [u] ou [v] du français, si ceux là sont absents de leur langue maternelle. Dans le domaine du goût, un regard sur différentes cultures musicales montre que ce qui est apprécié ici peut être rejeté là. Donner une portée universelle à une pratique musicale ne peut se faire sans d'importantes précautions. Ce type de réflexion nécessite donc un examen attentif des réalités musicales dans leurs diversités et leur spécialisation. Une part du très riche travail du philosophe, compositeur et mathématicien François Nicolas dans ses cours ou conférences à l'ENS de la rue d'Ulm, ainsi que les recherches en partie conjointes menées à l'IRCAM [9] par le groupe *mamuphi* (mathématique, musique et philosophie) en sont des exemples. Il fait aussi l'objet de certains travaux indépendants [10]. Si certains éléments de ces réflexions pourront être repris ici, l'objet de l'introduction historique que présente ce livre est toutefois plus modeste : on a pu constater que de l'Antiquité au début du XX^e siècle, les modèles mathématisés que les diverses cultures ont construit dans l'espoir d'expliquer la musique en tant que telle ont constitué une trame qui a permis d'arriver au modèle physico-mathématique de l'acoustique scientifique actuelle. Les travaux de l'historien et philosophe des sciences Patrice Bailhache, dont l'*Histoire de l'acoustique musicale*, malheureusement épuisée, constitue un document de première valeur, ont largement nourri la réflexion qui a conduit à ce petit livre, tout comme les très nombreux éléments présentés sur la question par Pierre Liénard dans sa très documentée *Petite histoire de l'acoustique*. L'étude de ce parcours présente un intérêt à divers titres : il présente un dialogue entre des champs de savoir différents, que sont d'abord les mathématiques et la philosophie, puis les mathématiques, la philosophie et la physique, la physiologie y arrivant par la suite. Il permet d'éprouver les limites, mais aussi les richesses des modèles mathématisés ; même faux dans leur phase de modélisation, ils peuvent apporter quelque chose aux générations suivantes par la précision avec laquelle ils décrivent les phénomènes observés. Enfin, ils soulignent les fortes affinités entre les mathématiques et les sciences de la nature. Toutefois, la difficulté mathématique de ce livre restera relativement limitée [11], son objet étant d'abord de montrer l'utilité de cette discipline lorsqu'elle dialogue avec les autres champs du savoir. On verra ainsi qu'un modèle mathématique, une fois mis à l'épreuve de l'expérimentation doit certes rester dans les limites dans lesquelles celle-ci l'a validé, mais devient alors un outil puissant

9. L'IRCAM, Institut de Recherche en Coordination Acoustique-Musique est une des institutions les plus importantes quant à la recherche sur les approches scientifiques pour la musique. On peut consulter sa page sur la toile à l'adresse : http ://www.ircam.fr

10. Les publications [**67, 70**] peuvent donner une idée synthétique des résultats de ces différentes approches.

11. Le lecteur désireux de pousser plus avant dans cette direction pourra consulter [**11, 47, 77, 79**] par exemple.

de compréhension et de découvertes nouvelles. L'examen des questions observées ici est donc intéressant tant au titre de l'histoire des mathématiques et des sciences que de celle de la musique. Une bibliographie indicative permettra au lecteur désireux de prolonger la réflexion proposée de diriger ses choix. Enfin, les termes spécialisés utilisés sont définis au cours du texte ; cependant, pour faciliter la lecture de cet ouvrage, un index des termes musicaux et des termes scientifiques d'usage courant, mais parfois peu connus par les personnes qui ne pratiquent pas ces disciplines est ajouté à la fin. De même, les démonstrations scientifiques requérant le plus de technicité et non indispensables lors d'une première lecture, sont regroupées en annexe. Certains éléments, dont la portée immédiate est importante, sont parfois maintenus dans le corps du texte. Ils peuvent toutefois être lus pour leurs résultats seulement. L'aspect technique des calculs est présenté pour donner une idée des démarches scientifiques qui y conduisent. Stéphanie Decreux-Duchêne, Michel Moulis et Emmanuelle Py m'ont fait l'amitié de relire le manuscrit de ce livre. Je les remercie pour cela et pour les nombreuses remarques qu'ils ont formulées pour son amélioration. Je remercie plus généralement toutes les personnes qui m'ont encouragé ou donné des conseils dans ce travail.

Introduction générale

Les éléments techniques que notre époque sait mettre au service des réalisations sonores semblent apporter à l'idée d'un double regard – scientifique et artistique – sur la musique une légitimité nouvelle. Pourtant, si l'apport d'une représentation physico-mathématique de l'acoustique est indéniable quant à la compréhension du son, matière première indispensable à la musique, sa contribution à l'acte artistique en soi, effectivement doté d'une séduction renouvelée aux XX^e et XXI^e siècles, est toutefois l'objet de discussions irrésolues et que l'on croit souvent récentes. L'objet de ce livre est de présenter une perspective historique de cette situation à travers l'étude de moments choisis. Tout d'abord, une présentation simple des éléments d'acoustique scientifique désormais à la disposition de la musique, ainsi que des outils technologiques qui en découlent sera faite. Ce point de vue présente un exemple significatif de dialogue entre le langage mathématique, dont la pertinence est ici évidente, les sciences physiques qui expliquent le phénomène, et une activité dont la raison première est artistique. La description de ce premier moment, l'époque moderne, permet de proposer une synthèse des connaissances dont disposent les musiciens, mais également le grand public. Les critères de qualité scientifique de cette approche – cohérence interne, cohérence avec des expériences, et utilité pour la compréhension de phénomènes observables aussi bien que dans ses applications technologiques – pourront alors être jugés par le lecteur. Il sera montré que dans les traditions de la musique savante occidentale, entendons par là : méditerranéenne, le compagnonnage de la musique et des sciences – tout particulièrement des mathématiques – a des racines anciennes et profondes. La présentation historique de ce parcours suivra le découpage généralement admis pour cela, notamment dans les travaux de Patrice Bailhache : une première grande période peut être envisagée autour de l'Antiquité gréco-latine avec l'approche grecque de la théorie de la musique. Elle voit s'établir un dialogue entre mathématique, philosophie et musique qui donnera le jour à des idées dont le développement sera important. Ainsi, si la pratique de la musique a largement évolué entre l'époque de l'Antiquité Grecque classique, celle de l'Empire Romain et enfin et surtout au Moyen Âge, les fondements de la théorie sont restés presque inchangés. Toutefois, du dialogue entre Aristoxène de Tarente avec les pythagoriciens aux lectures médiévales des écrits des anciens, particulièrement Boèce, l'écart entre la pratique musicale et ces spéculations théoriques sera devenu si grand qu'il suffira d'un changement d'attitude face au caractère incontestable des écrits antiques pour remettre en cause l'édifice des connaissances jusque là reconnues. Ce qu'on appelle parfois la première Renaissance, le XIII^e siècle occidental prépare alors une deuxième grande période. On peut considérer que celle-ci s'étend du XV^e siècle à la fin du XVIII^e siècle. La chute de l'Empire romain d'Orient et l'afflux de savants et d'idées en provenance des cultures savantes de ces régions semblent avoir donné aux penseurs européens de la Renaissance des hardiesses nouvelles. A partir de ce moment, avec les spéculations de grands savants, on voit, à travers un effort pour traiter des questions proprement musicales, les tentatives d'appréhension intellectuelle du phénomène sonore progresser par erreurs ou approches incomplètes successives. L'événement marquant est sans doute, avec l'émergence de la géométrie pour expliquer des phénomènes qui étaient jusque là mis en relation essentiellement avec l'arithmétique, la naissance des sciences physiques expérimentales, qui viendront enrichir ce dialogue. Le XVIII^e siècle est considéré comme un temps fort susceptible de couronner cette période. Plus que des découvertes nouvelles, l'agencement des différents points de vue autour des questions musicales peut apparaître comme une marque de maturité scientifique. Le débat autour des travaux du compositeur et théoricien de la musique Jean Philippe Rameau, initiés par son *Traité de l'harmonie, réduite à ses principes naturels* , écrit en 1722, en est, sinon le ferment, au moins le révélateur. Le mathématicien et encyclopédiste, rapporteur à l'Académie des Sciences de Paris, Jean le Rond d'Alembert, mesurant l'importance de l'œuvre du grand artiste, emploie alors son enthousiasme à retraduire une version ultérieure de cet ouvrage dans une langue scientifique plus claire afin de la rendre accessible au plus grand nombre et – dixit – même aux enfants. Cela lui permet d'apporter un éclairage nouveau au discours que les sciences et parmi elles les mathématiques, continuaient à porter sur la musique, avec tout particulièrement le riche travail de son contemporain Leonhard Euler. Pour une vision scientifique actuelle, un équilibre satisfaisant au regard de ce qui était su à cette époque semble alors atteint. Les mathématiques n'expliquent plus directement la musique, mais éclairent ses règles de fonctionnement en montrant sa compatibilité avec une description de la nature du son au sens où les sciences physiques le décrivaient alors. Ce point de vue devient alors un fondement largement partagé des approches scientifiques des phénomènes musicaux. On distingue toutefois le XIX^e siècle – et les temps qui ont suivi – comme une troisième période par plusieurs critères. Le premier est sans doute le considérable élargissement du public ayant accès aux connaissances scientifiques ; l'importance sociale de ces connaissances s'en trouve augmentée. L'émergence d'appareils de plus en plus sophistiqués en constitue sans doute un second. Les progrès en mathématiques et en sciences élargissent enfin le champ d'application de ces connaissances. Ils permettent non seulement de mieux comprendre le son, mais aussi les instruments qui le produisent et le système physiologique qui permet de les percevoir. Cette dernière étape, à laquelle plusieurs savants importants ont participé, peut être présentée à travers l'œuvre du grand scientifique allemand Hermann von Helmholtz, dont l'écho chez plusieurs compositeurs de la modernité est d'ailleurs tout à fait significatif. Il sera alors possible au lecteur d'apprécier dans quelle mesure on s'est approché de l'état actuel de l'approche scientifique des phénomènes musicaux.

CHAPITRE 1

Acoustique : un point de vue moderne

Introduction

Le fait de pouvoir assimiler un son à un phénomène ondulatoire est devenu suffisamment courant pour que certaines confusions de termes puissent se faire dans le langage : chacun comprend ce que peut être la *fréquence* d'un son, alors que la qualité sonore décrite est la *hauteur* ou l'*acuité*[1]. Cette représentation qui appartient au domaine des sciences physiques dans le découpage académique des disciplines scientifiques utilise toutefois des concepts mathématiques variés. Certains d'entre eux peuvent être très sophistiqués. Ainsi, si une première étape de compréhension peut être franchie à l'aide d'outils élémentaires tels que les fonctions à une (ou parfois deux) variable(s), de l'arithmétique simple et éventuellement des formules de trigonométrie, une vision plus complète fait appel aux équations différentielles, aux équations aux dérivées partielles ou à l'analyse de Fourier, voire à des outils plus ardus de théorie du signal. Toutefois, même ces derniers résultats peuvent être rendus sensibles grâce à des visualisations parlantes que l'outil informatique rend notamment aujourd'hui assez faciles d'accès. Ce chapitre se propose d'exposer les éléments du regard actuel des sciences sur la musique nécessaires pour comprendre les bases de fonctionnement des outils électroniques qui sont désormais familiers, ainsi que pour une utilisation raisonnée de l'outil informatique. Il apparaît en effet que ces connaissances constituent un socle raisonnable pour la musique d'aujourd'hui ; elles font généralement partie de ce que sait un musicien, mais ne sont pas toujours reliées entre elles, ni envisagées dans un contexte scientifique. Il convient toutefois d'avoir dès à présent à l'esprit que le point de vue qui est présenté ici est le fruit d'une longue maturation. Les *résultats* trouvés dans différentes époques du passé pourront trouver une signification acoustique dans ce cadre, mais les *démarches* doivent en revanche être évaluées en fonction du contexte, souvent en partie effacé, qui a vu leur naissance.

1. On peut remarquer que le mot *hauteur* renvoie à une représentation spatiale des notes, liée notamment à l'écriture musicale qui veut qu'on place en haut les notes les plus aiguës. Si l'on se référait à la place des notes sur un clavier usuel, le caractère aigu d'une note serait caractérisé par le fait d'être plus à droite et appellerait un autre substantif. Il est à noter que le fait de regarder les notes comme évoluant en hauteur, en confiant la description de phénomènes sonores à une représentation relevant de l'espace, constitue déjà une modélisation mathématique implicite. Celle-ci s'est notamment développée au Moyen Âge, au moment où naissait ce qui a conduit à la notation classique de la musique.

1. Les phénomènes ondulatoires

1.1. Mise en évidence d'ondes *sonores*.

Les phénomènes ondulatoires – ou vibratoires – sont fréquents dans la nature. Les vaguelettes à la surface de l'eau après le jet d'une pierre, une lame métallique vibrante produisant un son, ou le mouvement d'une balançoire en sont des exemples. Tous ne peuvent naturellement pas être assimilés à des sons, mais le deuxième leur est manifestement associé. Une relation entre sons et vibrations peut être mise en évidence de manière plus précise dans les expériences suivantes :

- Une main posée sur une vitre au passage d'un véhicule sonore renseigne sur le fait que la perception du son est accompagnée d'un phénomène sensible au toucher : une vibration mécanique de la surface concernée.
- Coller son oreille sur un rail peut permettre d'entendre un train arriver de très loin, comme le savent tous les amateurs de westerns. Cela indique que le son peut non seulement se déplacer ailleurs que dans l'air, mais encore qu'il le fait parfois mieux ainsi – en l'occurrence plus vite.
- Qui, enfant, ne s'est amusé à tendre une ficelle entre deux boîtes de conserve ou pots de yaourt, au préalable soigneusement vidés pour le bien de la science ? Une parole prononcée dans une boîte arrive, déformée, à l'oreille de l'interlocuteur. En revanche, si un obstacle rencontre le fil ou si celui-ci n'est pas bien tendu, le phénomène s'arrête. Le son est transmis du fond de la première boîte au fil qui lui est solidaire. Ce dernier tendu, impose au fond de la deuxième boîte un mouvement de même forme que celui de la première, aux raideurs près des éléments du système. Le résultat audible est une transmission du message sonore, déformé, mais reconnaissable.

Ces quelques observations inclinent à donner une définition précise des ondes, ainsi qu'à opérer une distinction entre différents types de ces ondes. Il apparaît que les exemples précédemment observés sont compatibles avec la définition classique suivante :

> **Onde :** une onde consiste en le déplacement d'une déformation locale du milieu physique sans déplacement global de matière.

On peut distinguer les cas respectifs où la déformation de ce milieu a lieu dans le sens de déplacement de l'onde, comme c'est manifestement le cas de l'onde provoquée par une membrane de la Figure 1 qui est présenté ci-après [2], ou dans le sens orthogonal comme dans le cas d'une corde dont on agite une extrémité [3]. Dans le premier cas, on parle d'onde *longitudinale*, et dans le second cas d'onde *transversale*. L'examen de ces exemples conduit alors à accepter la définition suivante :

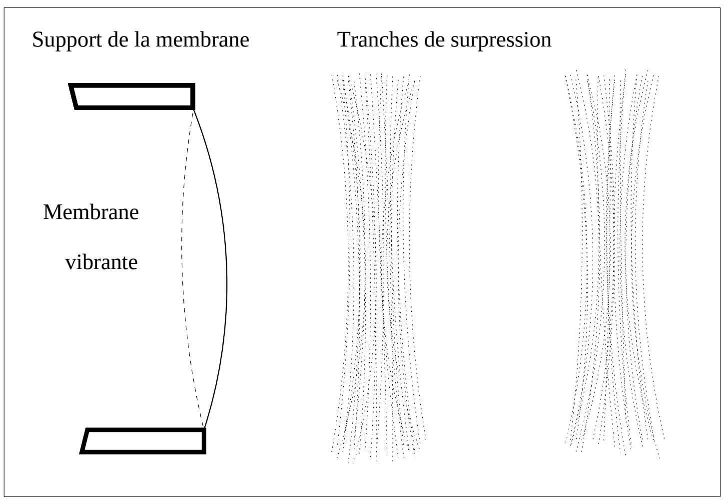
2. C'est aussi le cas le long du fil reliant les deux boîtes de l'expérience citée précédemment.
3. Cela peut être observé sur la Figure 9 par exemple.

Onde sonore : on appelle onde sonore toute onde longitudinale susceptible d'être transmise à l'oreille. [4]

Cela peut être rendu sensible par les vibrations d'une membrane tendue qui oscille. Il est évident qu'elle rend un son. Si son oscillation est régulière, on constate que ce son peut se voir attribuer une hauteur déterminée [5].

On voit qu'en position saillante, la membrane crée une pression sur l'air environnant. Une surpression est alors créée, et elle provoque un déplacement de l'air vers la droite sur le schéma. Mais la membrane se retire et se trouve en position rentrante. Il se crée alors une dépression qui ne fait pas revenir la tranche d'air partie, mais est compensée par l'arrivée d'air sur les côtés. Lors du mouvement suivant de la membrane en position saillante, une nouvelle surpression se crée, qui se déplacera à son tour vers la droite. Un mouvement ondulatoire est ainsi engendré. Les membranes oscillantes illustrent ainsi comment peuvent être créées des ondes se propageant selon une direction. On peut également observer qu'elles sont un moyen couramment utilisé pour en créer.

Figure 1 : membrane en vibration



4. Remarquons que cette définition conduit à accepter comme ondes sonores les ondes dont les fréquences sont telles que l'oreille humaine les reçoit, mais ne les perçoit pas. Ainsi les infra-sons, dont les éléphants font usage pour communiquer sur de longues distances, et les ultra-sons, dont les chauves souris se servent comme d'un sonar pour se repérer dans l'espace. Les premiers se servent de la facilité de ces ondes à parcourir de longues distances en contournant les petits obstacles, les secondes au contraire, de la capacité à se réfléchir sur ces derniers et à renseigner ainsi sur leur présence. Cette définition pourrait sans grand dommage être remplacée par celle qui parlerait d'onde susceptible d'être *entendue* par l'oreille d'un auditeur supposé, mais dépendrait alors des capacités de celui-ci.

5. Cela est le cas pour des instruments à percussion appelés les timbales, par exemple. Ce n'est pas explicitement le cas pour certains tambours en revanche ; on verra que cela peut être relié à la régularité des oscillations de leurs membranes.

On peut alors mettre en parallèle les caractéristiques des ondes et des sons qui leur sont associés.

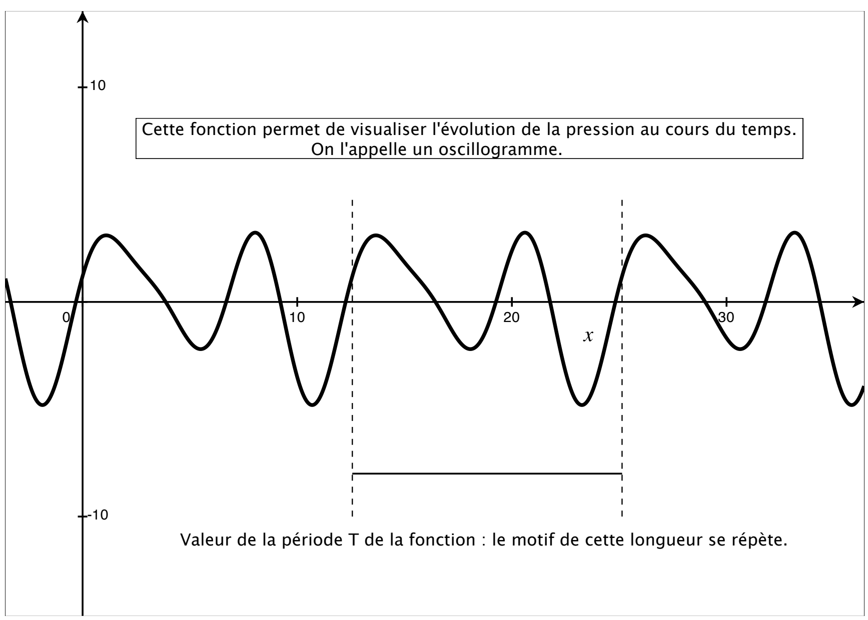
1.2. Caractéristiques des ondes sonores.

Il importe, en commençant ce paragraphe, de donner quelques définitions usuelles utiles lorsque l'on veut décrire des ondes. Ces dernières peuvent être en effet décrites comme des fonctions du temps si on se place en un point de l'espace donné, ou comme des fonctions de l'espace si on observe le phénomène à un temps fixé. On est amené à considérer ici des sons musicaux, qui sont notamment dotés d'une hauteur. Les ondes associées sont alors dites périodiques et on peut leur attribuer une fréquence [6].

Période, fréquence, longueur d'onde

On dit qu'une onde – aussi appelée signal (sonore) – représentée par une fonction [7] de la variable t qui décrit le temps est *périodique* si ce signal se reproduit identique à lui-même à intervalle régulier de temps, que l'on note T. Le schéma suivant représente un tel signal sonore périodique dans le temps. On constate effectivement que le motif représenté sur la longueur T se répète identique à lui-même au cours du temps.

Figure 2 : représentation d'un signal périodique dans le temps.



6. Les exemples qui seront donnés ultérieurement conduiront à relativiser en partie ce point de vue, mais celui-ci reste très largement valable pour une première approche.

7. La courbe représentative d'une fonction correspondant à une onde sonore s'appelle un oscillogramme. Il n'est naturellement pas nécessaire que la fonction soit périodique pour pouvoir considérer un oscillogramme.

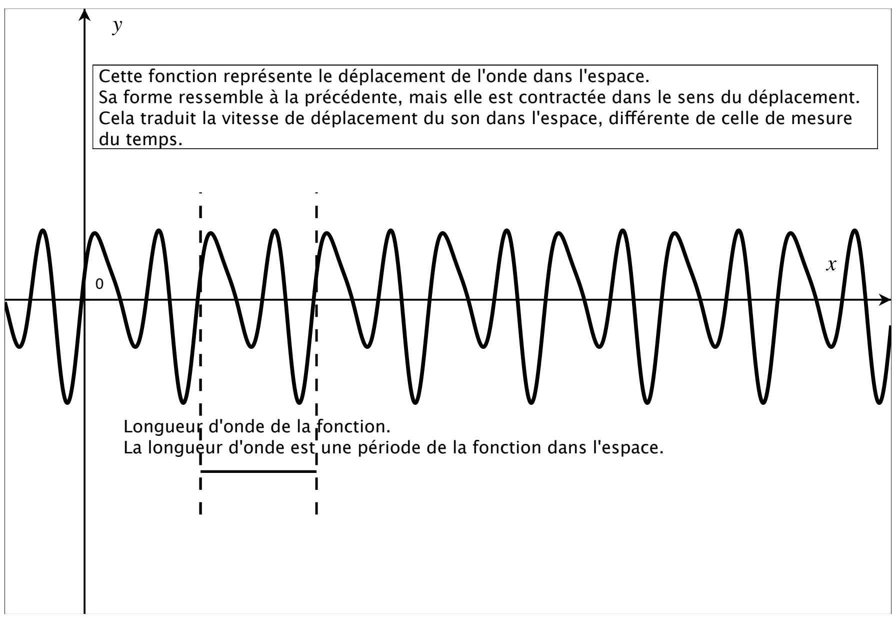
Cela se traduit mathématiquement par l'assertion selon laquelle il existe[8] pour la fonction notée g un nombre réel T tel que

$$\text{Pour tout nombre réel } t, g(t+T) = g(t)$$

La fréquence f d'une onde sonore est définie comme l'inverse de sa période T : $f = \frac{1}{T}$. Elle représente donc le nombre de fois où, par unité de temps, le signal se reproduit identique à lui-même. En général, le temps est mesuré en secondes et la fréquence s'exprime alors en Hertz.

La seconde courbe représente à un moment fixé les variations de la pression dans l'espace. Ces deux courbes sont reliées. On constate que la deuxième courbe est elle aussi périodique. Cette période est nommée la longueur d'onde et est notée λ. Par ailleurs, les motifs correspondant à la forme de ces courbes ont des caractères communs.

Figure 3 : représentation d'un signal périodique dans l'espace.



La longueur d'onde λ est la longueur parcourue par l'onde concernée pendant une période T. Au bout de cette durée, le signal dont la forme se déplace a repris à sa source sa forme initiale : la forme qui se propage se répète donc, cette fois-ci dans l'espace. Cela explique que la courbe représentant les variations de l'onde dans l'espace est elle aussi périodique. Plus précisément, elle correspond à la propagation dans l'espace de la déformation dans le temps qui provoque l'onde. La contraction de la figure[9] provient de la vitesse de

8. Il n'est pas très difficile de se convaincre mathématiquement que, pour une fonction dite *continue* et non constante, il existe un plus petit nombre T convenant pour cela, et qu'alors, pour tous les multiples entiers de T et pour eux seuls, la fonction se reproduit identique à elle-même dans le temps.

9. Ce type d'analogies entre courbes représentatives de fonction est familière en mathématiques. Elle correspond à la transformation de $x \mapsto f(x)$ en $x \mapsto f(\alpha x)$, α étant

propagation de l'onde. Ces deux courbes ont en fait une forme qui se correspond, au choix de l'échelle de l'axe des abscisses près.

Si la célérité c de déplacement de l'onde est connue (par exemple environ 340 mètres par seconde pour le son dans l'air à 20 degrés Celcius), ces grandeurs sont donc reliées par les relations $f = \frac{1}{T}$ et $\lambda = cT$, dont on peut aussi déduire $\lambda = \frac{c}{f}$.

Amplitude.
On peut définir pour une onde une amplitude, qui correspond à l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale que prend l'onde sur l'intervalle d'une période, comme cela est figuré sur les schémas précédents. Cette amplitude est reliée à l'énergie du signal, mais ne doit pas entièrement être confondue avec lui. En effet, si on multiplie l'amplitude d'un signal par exemple par 2, l'énergie de cette onde sera multipliée par le carré de 2, c'est-à-dire 4. De plus, on peut avoir deux signaux de même amplitude, mais d'énergie différente selon la forme de ces derniers.

Correspondance entre sons musicaux perçus et ondes physiques.
Notons que la frontière de ce qui est considéré comme un son musical a tendance à s'étendre sous l'action d'une évolution culturelle certaine [10]. Ainsi, après les œuvres pour percussions seules comme *Ionisation* de Varèse (achevé en novembre 1931), *Cérémonial* de Jolivet [11] ou les *Pléiades* de Xénakis (créées le 3 mai 1979), il devient très surprenant de se rappeler que quelques années (ou décennies en ce qui concerne les dernières) auparavant, le compositeur Darius Milhaud, grand connaisseur de la modernité de la musique de son temps, avait passé dix lignes pour expliquer dans le programme de son œuvre *L'homme et son désir*, qu'il avait laissé un solo de batterie de cinq minutes dans sa pièce, mais que tout de suite après, "*la musique repren[ait]*". Toutefois, au-delà des variations importantes qu'apporte l'éducation de l'oreille, et par elle, la culture laquelle elle a reçu cette éducation, il est possible d'établir des correspondances entre le son perçu et les paramètres mathématiques décrivant le signal physique. Ce point de vue est admis depuis le XIX^e siècle [12], et si on vérifie dans certains cas qu'il peut être contesté à la marge, comme le montrera le prochain paragraphe,

---

un nombre réel positif. Elle se traduit visuellement par un étirement ou une contraction de la figure selon la direction de l'axe horizontal.

10. Remarquons que le fait que l'on comprenne de mieux en mieux la nature des sons apériodiques n'est peut-être pas étranger à ce phénomène. La modélisation mathématique qui sert cette évolution – le terme *apériodique* en témoigne – y joue d'ailleurs un rôle. Cela peut engager à réfléchir à la validité d'une définition d'un *son musical* comme *un son que l'on peut comprendre.*

11. Cette œuvre a été composée pour six percussionnistes, et publiée en 1970 en hommage au précédent lors de sa disparition.

12. Cela est notamment mentionné dans l'importante synthèse que fait le grand savant W. Helmholtz des connaissances scientifiques utiles à la musique en 1863, voir [**48**].

sa validité dans une première approche s'avère en général très convaincante.

Tableau de correspondances entre qualités sonores et propriétés des ondes.

Son	Onde
hauteur	fréquence
intensité	amplitude
timbre	forme

En ce qui concerne la correspondance entre fréquence et hauteur de son, on peut retenir qu'un son est perçu d'autant plus aigu que sa fréquence est élevée – donc représentée par un grand nombre. Sa période étant l'inverse de la fréquence, le son sera donc d'autant plus aigu que la période sera petite. La longueur d'onde étant proportionnelle à la période, il sera donc d'autant plus aigu que la longueur d'onde est petite. Ces trois critères sont mathématiquement équivalents, et sont souvent employés dans la pratique. Pour un même son, il apparaît que son intensité sera augmentée si l'amplitude de l'onde augmente, et diminuée si elle diminue. La correspondance entre la forme d'un signal et son timbre correspond à une idée ancienne. Nous verrons toutefois que celle-ci doit être précisée, notamment dans le cas des ondes périodiques. En effet, si les timbres de deux sons sont perçus comme différents, les formes de leurs oscillogrammes sont différentes aussi, mais il est des cas où des formes d'oscillogrammes très différentes correspondent à des timbres perçus comme très proches.

1.3. A propos de la perception des grandeurs acoustiques.

Les résultats énoncés dans le tableau précédent constituent des correspondances qualitatives importantes. Il importe toutefois de comprendre que celles-ci ne sont pas mesurées d'une manière aussi immédiate que l'on pourrait le penser d'un premier abord.

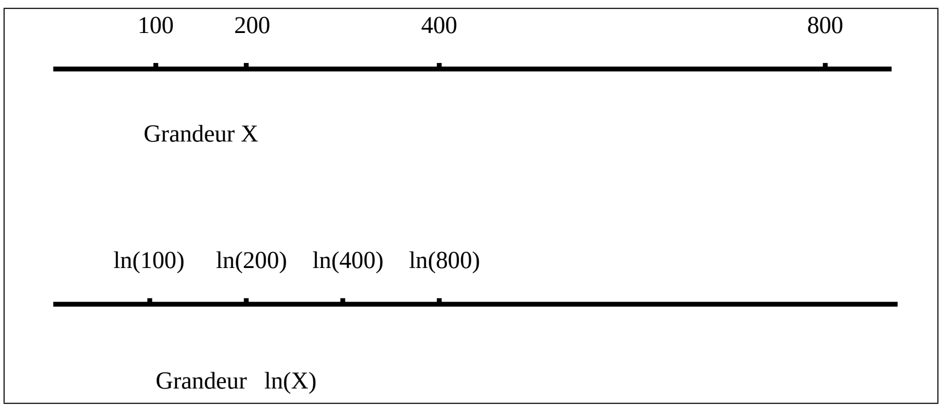
La fonction logarithme.

Notons tout d'abord qu'une partie du travail des chercheurs en sciences physiques consiste à trouver des grandeurs qui aient un sens du point de vue de leur science. Il est naturel de choisir ces grandeurs de sorte que certaines opérations naturelles puissent être interprétées : on doit par exemple pouvoir les additionner ou les multiplier en donnant un sens à ces opérations [13]. Les paragraphes précédents indiquent que la fréquence ou l'amplitude d'un signal sonore sont des grandeurs significatives pour les physiciens. Notamment, des opérations comme le fait de multiplier une fréquence par deux ou bien additionner des amplitudes peuvent trouver une signification physique.

13. On peut par exemple considérer que la quantité de chaleur (mesurée en Joule) est une grandeur additive en sciences physiques car si l'on dispose de deux sources de chaleur distinctes, la quantité de chaleur dispensée par l'ensemble des deux sources correspond à la somme de celles dispensées par chaque source. En revanche, la température de chaque source ne suffit pas à donner de renseignement précis sur la température résultant de l'action des deux sources.

Toutefois, on a vu que ces grandeurs sont transposées par nos sens en des sensations ; il y a des écarts entre la *grandeur ressentie* et la *grandeur physique* de départ.
On constate notamment qu'en ce qui concerne les phénomènes acoustiques, les grandeurs perçues ne sont pas en général proportionnelles aux grandeurs physiques. Plus précisément, on observe le phénomène suivant : lorsque les grandeurs physiques sont multipliées par deux, puis à nouveau par deux, on ressent un *décalage* perçu comme équivalent que le cerveau a tendance à interpréter comme une *addition*[14]. Cela serait aussi vrai pour des multiplications par d'autres nombres. Or il existe une fonction mathématique classique qui peut traduire ce phénomène : la fonction logarithme népérien, notée ln. Cela peut être illustré par le schéma suivant. On constate que la grandeur physique X fait des écarts de plus en plus grands – ils sont redoublés à chaque fois – alors que la grandeur $\ln(X)$ fait des écarts réguliers :

Figure 4 : représentation des correspondances entre grandeurs X et $\ln(X)$.



On montre mathématiquement un résultat plus complet : les fonctions vérifiant la propriété d'être continues[15] et la propriété

$$f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

sont des fonctions qui sont nécessairement proportionnelles à la fonction ln précédemment décrite. Remarquons que la propriété ci-dessus traduit que si

14. Ainsi, l'oreille perçoit le même écart entre un son de 200 Hertz et un son de 400 Hertz qu'entre un son de 400 Hertz et un son de 800 Hertz. L'auditeur interprète cela comme un décalage vers l'aigu de même ampleur (ici, il s'agit d'un décalage d'une octave). De même, si on multiplie l'amplitude A d'un son sinusoïdal par deux (on obtient $2A$), puis par quatre (on obtient $4A$), l'auditeur a l'impression que l'intensité du son augmente à chaque fois de la même manière, alors que l'amplitude physique du signal sonore a augmenté de A lors de la première étape et de $2A$ lors de la deuxième.

15. Cette propriété est naturelle en ce qui concerne la plupart des phénomènes physiques : elle traduit essentiellement qu'on passe par des états intermédiaires à tous les niveaux entre deux valeurs différentes de la variable.